



UNIVERSITÉ FRANÇOIS RABELAIS DE TOURS

École Doctorale : Santé, Sciences et Technologies

Année Universitaire : 2006-2007

THÈSE POUR OBTENIR LE GRADE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE TOURS

Discipline : Informatique

présentée et soutenue publiquement par

Julien MILLE

le 3 décembre 2007

Modèles déformables pour la segmentation et le suivi en imagerie 2D et 3D

Directeur de thèse : Hubert CARDOT

Co-encadrants : Romuald BONÉ, Pascal MAKRIS

JURY :

ISABELLE BLOCH	<i>Rapporteur</i>	Professeur	Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications, Paris
ROMUALD BONÉ	<i>Examineur</i>	Maître de conférences	Université de Tours
HUBERT CARDOT	<i>Directeur</i>	Professeur	Université de Tours
LAURENT COHEN	<i>Examineur</i>	Directeur de recherche	Université de Paris IX Dauphine
PASCAL MAKRIS	<i>Examineur</i>	Maître de conférences	Université de Tours
NIKOS PARAGIOS	<i>Rapporteur</i>	Professeur	Ecole Centrale de Paris
MARINETTE REVENU	<i>Examineur</i>	Professeur	Ecole Nationale Supérieure d'Ingénieurs de Caen

Remerciements

En premier lieu, je tiens à remercier mon directeur de thèse Hubert CARDOT ainsi que mes encadrants Romuald BONÉ et Pascal MAKRIS qui ont su me guider pendant ces trois années. Je leur suis reconnaissant pour leurs conseils avisés, leurs relectures minutieuses et tout simplement pour le temps qu'ils m'ont consacré. Merci également à Christian PROUST pour m'avoir accueilli au sein du Laboratoire d'Informatique de Tours.

J'exprime toute ma gratitude à Isabelle BLOCH et Nikos PARAGIOS pour avoir accepté la lourde tâche de rapporter cette thèse. Je remercie vivement Laurent COHEN et Marinette REVENU pour m'avoir fait l'honneur de participer à mon jury.

Merci également à Ludovic LAUNEAU, au professeur Patrick LERMUSIAUX du Centre Hospitalier Universitaire de Tours et Jean-Marc GRÉGOIRE du Laboratoire UltraSons, Signaux et Instrumentations (LUSSI) de Tours pour m'avoir abreuvé de données tridimensionnelles, matière première indispensable à l'accomplissement de ces travaux.

Merci aux doctorants du Laboratoire d'Informatique pour ce qu'ils sont, tout simplement. En particulier : Sébastien pour sa diplomatie sans faille et Stéphane pour son verbe bien à lui et ses tenues vestimentaires qui rendent les miennes acceptables, Julien pour les surnoms affectueux dont il m'affuble, David pour ses empoignades vigoureuses, Ludovic pour son accent si rafraîchissant, Cédric pour ses yeux malicieux, Cyril pour sa bonne humeur communicative, Alain pour son aspect inquiétant mais tellement familier et enfin Nicholas pour sa chevelure foisonnante.

Mes pensées vont également à ma famille, en particulier mes parents et mes innombrables soeurs pour la confiance qu'ils m'ont accordée sans le vouloir nécessairement. Enfin, dernier remerciement mais non des moindres, merci à Aurore pour son soutien sans faille. Grâce à elle, ces trois dernières années n'ont pas été qu'un amas de code C++ et de formules mathématiques biscornues.

Table des matières

1	Introduction	3
2	Modèles déformables en segmentation 2D et 3D	7
2.1	Représentation	8
2.1.1	Modélisation continue	9
2.1.2	Représentations discrètes	10
2.1.3	Représentations paramétrées	13
2.1.4	Ensembles de niveaux	17
2.1.5	Discussion	19
2.2	Evolution	20
2.2.1	Approche variationnelle	20
2.2.2	Approche gloutonne	25
2.2.3	Approche physique	29
2.2.4	Gradient de l'énergie	30
2.2.5	Modèles de forme active et d'apparence active	32
2.2.6	Evolution des modèles implicites	33
2.2.7	Discussion	37
2.3	Attache aux données	38
2.3.1	Termes basés contour	38
2.3.2	Termes basés région	46
2.3.3	Discussion	56
2.4	Choix du modèle déformable	56
3	Modèles déformables explicites 2D et 3D	58
3.1	Modèle de contour actif	59
3.1.1	Modèle continu	59
3.1.2	Energie	61
3.1.3	Implémentation	64
3.1.4	Rééchantillonnage du contour	69
3.1.5	Normalisation des énergies	71
3.2	Modèle de surface active	73
3.2.1	Modèle continu	73
3.2.2	Energie	75
3.2.3	Maillage triangulaire	77

3.2.4	Construction du maillage initial	79
3.2.5	Energies	81
3.2.6	Algorithme de remaillage	85
3.2.7	Normalisation des énergies	86
3.3	Discussion	88
4	Amélioration de la méthode d'évolution	90
4.1	Evaluation de la surface	91
4.1.1	Distance de Hausdorff	91
4.1.2	Voxélisation du maillage	93
4.2	Améliorations de l'algorithme glouton	96
4.2.1	Orientation de la fenêtre	97
4.2.2	Réduction du voisinage : évolution selon la normale	101
4.3	Méthodes concurrentes	109
4.3.1	Approche physique	110
4.3.2	Ensembles de niveaux	114
4.4	Expérimentations	121
4.4.1	Paramétrage	121
4.4.2	Images synthétiques	122
4.4.3	Images médicales	126
4.5	Discussion	128
5	Energie de région en bande étroite	130
5.1	Energie de région sur le modèle de contour	132
5.1.1	Difficultés	132
5.1.2	Le théorème de Green-Riemann pour les contours actifs basés région	134
5.1.3	Notre énergie de région : principe de la bande étroite	137
5.1.4	Approximation des intégrales de domaine	140
5.1.5	Calcul des variations	144
5.1.6	Dérivation selon la normale	148
5.1.7	Implémentation	153
5.2	Extension au modèle de surface active	158
5.2.1	Difficultés	158
5.2.2	Le théorème de Green-Ostrogradski pour les surfaces actives basées région	159
5.2.3	Bande étroite 3D	161
5.2.4	Approximation des intégrales de volume	161
5.2.5	Dérivation selon la normale	166
5.2.6	Implémentation	167
5.3	Expérimentations	169
5.3.1	Approximation numérique des intégrales de bandes	169
5.3.2	Ensembles de niveaux basés région	174
5.3.3	Tests	175

5.4	Discussion	182
6	Modèle de surface 3D+T pour le suivi dans des séquences cardiaques	187
6.1	Le cœur : anatomie et acquisition	188
6.1.1	Fonctionnement	188
6.1.2	Acquisition en IRM	189
6.2	Travaux antérieurs	191
6.2.1	Choix du modèle	193
6.3	Surface active 3D+T pour la segmentation et le suivi	194
6.3.1	Modèle général	194
6.3.2	Modèle cylindrique pour les séquences cardiaques	196
6.3.3	Energie du modèle cylindrique	198
6.4	Implémentation et minimisation de l'énergie	200
6.4.1	Structure 3D+T	200
6.4.2	Minimisation de l'énergie	202
6.4.3	Calcul du volume	205
6.5	Expérimentations	207
6.5.1	Initialisation	207
6.5.2	Evaluation	208
6.5.3	Influence de la régularisation	212
6.6	Discussion	214
7	Conclusion	216
7.1	Contributions	216
7.2	Perspectives	217
A	Energie de région en bande étroite	219
A.1	Caractéristiques de la courbe parallèle	219
A.1.1	Élément de longueur	219
A.1.2	Courbure	221
A.2	Aire de la bande	222
A.2.1	Intégration des périmètres	222
A.2.2	Preuve avec le théorème de Green-Riemann	222
A.3	Calcul des variations	223
A.4	Dérivée directionnelle selon la normale	226
A.4.1	Dérivation de l'énergie exacte	226
A.4.2	Dérivée de l'énergie approchée	227
A.5	Élément de surface	229
A.6	Dérivée de l'énergie de région 3D selon la normale	232
	Bibliographie	235

Liste des tableaux

4.1	Comparaison des méthodes d'évolution sur l'images des ellipsoïdes	123
4.2	Comparaison des méthodes d'évolution sur l'image de l'aorte	127
5.1	Erreur maximale sur les histogrammes en fonction de de l'échantillonnage w et de l'épaisseur de bande B	174
5.2	Comparaison du nombre d'itérations et du temps de calcul en secondes entre les modèles explicites utilisant l'Energie de Région en Bande Etroite (ERBE) et les ensembles de niveaux (EN)	177
5.3	Comparaison des distances de Hausdorff, en pixels/voxels, entre les modèles explicites utilisant l'Energie de Région en Bande Etroite (ERBE) et les ensembles de niveaux (EN)	177
6.1	Distances de Hausdorff entre la segmentation de référence et la segmentation estimée + écarts absolus et relatifs entre les fractions d'éjection de référence et les fractions d'éjection estimées	211

Table des figures

2.1	Surfaces de topologies différentes : plan, cylindre, tore et sphère	10
2.2	Le sous-graphe composé des sommets du voisinage de \mathbf{p}_i est un cycle . . .	12
2.3	Sphère discrétisée en maillage triangulaire (gauche) et maillage simplexe (centre). Dualité "face \leftrightarrow sommet" entre les deux maillages (droite).	13
2.4	Fonction d'ensembles de niveaux	18
2.5	Maillage de l'espace des paramètres pour la méthodes des éléments finis : rectangulaire (gauche) et triangulaire (droite)	26
2.6	Fenêtre carrée 3×3 autour du sommet \mathbf{p}_i	27
2.7	Fenêtre cubique $3 \times 3 \times 3$ (avec voxel central)	27
2.8	Fenêtres des algorithmes gloutons. (a) Fenêtre carrée de base (b) Fenêtres alternées de l'approche de Lam et Yan (c) Fenêtres alternées de l'approche de Sakalli <i>et al</i>	28
2.9	Détection des bords d'une coupe axiale de l'abdomen (scanner). (a) Différences finies (b) Filtre de Zucker-Hummel (c) Filtre de Monga-Deriche (seuil bas=0.5, seuil haut=0.8) (d) Carte des distances aux bords obtenues avec Monga-Deriche. Les normes de gradient sont représentées en négatif	43
2.10	Champ de vecteur issu du gradient (gauche) et champ de vecteur diffusé par la méthode du GVF (droite)	47
3.1	Courbe fermée avec normale et tangente au point $\mathbf{c}(u)$	60
3.2	La minimisation de la courbure tend à rendre le contour localement rectiligne	63
3.3	Discrétisation du contour Γ en un polygone	65
3.4	Minimisation de $E_{\text{continuité}}$ (gauche) et E_{courbure} (droite). Les positions qui minimisent $E_{\text{continuité}}$ sont les intersections des cercles, tandis que celle qui minimise E_{courbure} est le barycentre des voisins	68
3.5	Sans mécanisme de fusion, les intersections d'arêtes peuvent survenir . . .	70
3.6	A l'itération $t + 1$, les sommets \mathbf{p}_i et \mathbf{p}_{i+1} sont suffisamment éloignés pour qu'un carré de largeur w puisse être inséré sans recouvrement. Il y a donc séparation.	71
3.7	A l'itération $t + 1$, les fenêtres des sommets \mathbf{p}_i et \mathbf{p}_{i+1} se superposent. Il y a donc fusion.	71
3.8	Si la normalisation est locale à la fenêtre, l'énergie de courbure prend les mêmes valeurs alors que la courbure réelle est plus élevée dans le premier cas	72
3.9	Surface continue Γ avec tangentes et normale extérieure au point $\mathbf{s}(u, v)$. .	74

3.10	Voisinage topologique d'un sommet : le sous-graphe composé des sommets du voisinage de \mathbf{p}_i est un cycle	77
3.11	Séparation d'un triangle	79
3.12	L'icosaèdre (gauche) et les trois polyèdres obtenus par subdivisions successives. Les sommets en rouge sont les sommets initiaux	79
3.13	Voisinage dans un maillage quadrangulaire : $V_{i,j} = \{(i-1, j), (i+1, j), (i, j-1), (i, j+1)\}$	82
3.14	L'énergie de courbure rapproche un sommet \mathbf{p}_i du barycentre de ses voisins \mathbf{b}_i	84
3.15	Interpolation trilineaire pour approcher le gradient d'intensité du point central	85
3.16	Opérations de remaillage entre les sommets \mathbf{p}_i et \mathbf{p}_j : séparation d'arête avec création de sommet (haut) et fusion de deux sommets (bas)	87
3.17	Cas où les opérations de remaillage sont interdites entre les sommets \mathbf{p}_i et \mathbf{p}_j	88
4.1	Extraction de la frontière de référence par segmentation experte. (a) Région coloriée manuellement par l'expert (b) Frontière de référence obtenue par extraction des bords de la région	91
4.2	Comparaison de contours par distances de Hausdorff	93
4.3	Passage d'un maillage à un volume par voxélisation, et d'un volume à un maillage par triangulation	94
4.4	Voxélisation de triangle : la discrétisation doit être sans trou et d'épaisseur unitaire	95
4.5	Projection du triangle sur le plan qui maximise l'aire en vue de sa voxélisation	95
4.6	Fenêtre initiale centrée	98
4.7	Méthode de la fenêtre décalée : positions relatives du sommet \mathbf{p}_i dans sa fenêtre à deux itérations successives	99
4.8	Méthode par recherche linéaire : positions relatives du sommet \mathbf{p}_i dans les fenêtres cubique et linéaire	101
4.9	Fenêtre normale du sommet \mathbf{p}_i de largeur $w = 5$	103
4.10	Evolution du contour (haut) et du maillage (bas) avec l'énergie ballon (fenêtre carrée)	104
4.11	Lissage tangentiel	105
4.12	Effet du lissage tangentiel sur une surface déformée avec la fenêtre normale : sans lissage (a) et avec lissage (b)	106
4.13	Evolution du contour (haut) et du maillage (bas) avec énergie ballon (évolution selon la normale)	107
4.14	Listes L_{in} et L_{out} aux bords du contour 2D Γ implémenté en ensembles de niveaux	116
4.15	Segmentation de l'image des ellipsoïdes par rétractation de la surface (vue en coupe 2D)	124
4.16	Segmentation de l'image des ellipsoïdes par l'AGFN avec lissage tangentiel (haut) et sans lissage tangentiel (bas). (a) $w = 3$ (b) $w = 5$ (c) $w = 7$ (d) $w = 3$ (e) $w = 5$ (f) $w = 7$	125

4.17	Evolution selon la normale avec lissage tangentiel. (a) $w = 3$ (b) $w = 5$ (c) $w = 7$	125
4.18	Segmentation de l'image du vase. (a) Coupe 2D (b) Maillage obtenu avec algorithme glouton (c) Surface voxelisée obtenue avec les ensembles de niveaux	126
4.19	Coupe axiale d'une tomodynamométrie de l'abdomen où la section de l'aorte apparaît en blanc (a) Image initiale (b) Amplitude du gradient (en négatif)	127
4.20	Reconstruction de l'aorte avec l'algorithme glouton (a) $w = 3$ (b) $w = 5$. .	128
5.1	Exemples de structures pouvant être segmentées par approche région dans un voisinage : (a) Aorte en angiostanner (b) Ventricules du cerveau en IRM (c) Ventricule gauche du cœur en IRM	138
5.2	Bandes intérieure et extérieure pour l'énergie de région	138
5.3	La courbe Γ (noire) et deux courbes parallèles. La translation B_1 génère une courbe $\Gamma_{[B_1]}$ régulière (en bleu) tandis qu'une translation plus importante B_2 génère une courbe présentant des singularités (en rouge)	140
5.4	L'intégrale d'aire entre les deux courbes parallèles (en noir) est approchée comme la somme des intégrales sur toutes les courbes parallèles intermédiaires	141
5.5	Schéma de l'étude mathématique de l'énergie de région en bande étroite . .	149
5.6	Déplacement appliqué au point $\mathbf{c}(u)$ pour la minimisation de l'énergie de région en bande étroite	152
5.7	Valeur de $\langle \hat{E}'_{\text{région}}, \mathbf{n} \rangle$ en fonction de : (a) Courbure κ (b) Intensité $I(\mathbf{c})$ (c) Intensité $I(\mathbf{c}_{[-B]})$ (d) Intensité $I(\mathbf{c}_{[B]})$	154
5.8	Influence de la force de biais en fonction de l'écart absolu entre $\hat{\mu}(\mathcal{B}_{in})$ et $\hat{\mu}(\mathcal{B}_{out})$	155
5.9	Courbes tangentes à Γ au point $\mathbf{s}(u, v)$	163
5.10	Angles formés par \mathbf{p}_i et ses voisins pour l'estimation discrète des courbures moyenne et gaussienne sur le maillage	168
5.11	Evaluation de l'approximation des intégrales de bande sur l'image : (a) Courbe harmonique avec bandes intérieure et extérieure discrétisée (b) Comparaison entre histogramme réel et approché sur la bande intérieure (haut) et extérieure (bas)	170
5.12	Exemple de contour harmonique placé aléatoirement dans une image scanner	172
5.13	Surfaces construites à partir d'harmoniques sphériques (a,b,c) et métasphère (d)	173
5.14	Segmentation des ventricules en IRM cérébrale (coupe axiale). (a) Notre modèle avec énergie de gradient (b) Notre modèle avec énergie de région en bande étroite (c) Ensembles de niveaux avec terme de région	178
5.15	Segmentation du rein en scanner abdominal : (a) Vérité terrain (b) Notre modèle avec énergie de région en bande étroite (c) Ensembles de niveaux .	179
5.16	Segmentation du cœur (ventricules gauche et droit + oreillettes gauche et droite) en IRM 4 cavités : (a) Vérité terrain (b) Notre modèle avec énergie de région en bande étroite (c) Ensembles de niveaux	179
5.17	Segmentation d'une vessie de souris en imagerie ultrasonore	180
5.18	Flous gaussiens successifs pour l'estimation de l'épaisseur de bande nécessaire	181

5.19	Segmentation d'une image synthétique 3D avec bruit impulsif : (a) Image initiale (b) Image lissée avec filtre gaussien (c) Reconstruction obtenue avec notre modèle après lissage gaussien de la surface	183
5.20	Segmentation des ventricules cérébraux en IRM 3D : (a) Surface superposée au plan sagittal (b) Segmentation indépendante des deux ventricules	183
5.21	Segmentation de l'aorte en scanner 3D, avec mise en évidence du phénomène de fuite de contour des ensembles de niveaux (en vert) par rapport à la surface active explicite (en rouge). Les coupes (a) et (b) proviennent de patients différents	184
5.22	Reconstruction 3D de l'aorte abdominale en scanner 3D	185
6.1	Anatomie du cœur	189
6.2	Coupes du cœur transversales au ventricule gauche. (a) Coupe transversales (b) Anatomie du cœur en petit axe	190
6.3	Surface déformable de topologie cylindrique et sections de coupes image	197
6.4	Calcul de l'amplitude du gradient avec : (a) Dérivées en x et y (b) Dérivées en x , y et z	200
6.5	Connexions inter-coupes et inter-phases dans la surface 3D+T discrète	201
6.6	Minimisation de E_{coupe} lorsque le sommet $\mathbf{p}_{i,z,t}$ est sur une coupe quelconque (gauche) et lorsque le sommet est un bord (droite)	204
6.7	Plans XY (gauche), XZ et YZ (droite). Les volumes occupés par les voxels sont parallélépipédiques au lieu d'être cubiques	206
6.8	Estimation du volume du ventricule : approximation indépendante de la structure 3D (gauche) et avec prise en compte de la structure 3D (droite)	206
6.9	Calcul du volume du maillage : (a) Triangulation d'une coupe grâce au barycentre (b) Triangle en cours de calcul (c) Deux tétraèdres correspondant au triangle	207
6.10	Segmentation d'un cœur sain. Coupes $z = 1$, $z = 5$ et $z = 9$ et maillage triangulaire cylindrique	210
6.11	Segmentation d'un cœur pathologique : coupe $z = 4$ avec $\omega_{\text{courbure}} = 2$ (ligne supérieure) et coupe $z = 5$ avec $\omega_{\text{courbure}} = 0.5$ (ligne inférieure)	212
6.12	Fuite de contour en l'absence de régularisation spatiale et temporelle	213
6.13	Régularisation spatiale et temporelle	214

Notations

Opérateurs

\mathbf{a} : les vecteurs sont notés en minuscules grasses

\mathbf{A} : les matrices sont notées en majuscules grasses

$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$: produit vectoriel

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$: produit scalaire

$\mathbf{a}^T / \mathbf{A}^T$: transposé d'un vecteur ou d'une matrice

\mathbf{A}^{-1} : inverse

$\|\mathbf{a}\|$: norme euclidienne

$\|\mathbf{a}\|_1$: norme 1

$\|\mathbf{a}\|_\infty$: norme infinie

$\lfloor x \rfloor$: arrondi à l'entier inférieur

$\lceil x \rceil$: arrondi à l'entier supérieur

∇ : gradient

∇^2 : laplacien

div : divergence

$\langle x', \mathbf{v} \rangle$: dérivée directionnelle de x dans la direction \mathbf{v}

Contour et surface

Γ : contour ou surface

$\Gamma_{[B]}$: courbe ou surface parallèle de décalage B

I : fonction d'intensité de l'image

B : épaisseur de bande

κ : courbure d'un contour

κ_M : courbure moyenne

κ_G : courbure gaussienne

κ_N : courbure normale

ℓ : élément de longueur

a : élément de surface
 ψ : fonction d'ensemble de niveaux
 H : échelon de Heaviside
 δ : fonction de Dirac
 \mathbf{c} : vecteur position du contour
 \mathbf{s} : vecteur position de la surface
 \mathbf{t} : tangente unitaire
 \mathbf{n} : normale unitaire
 n : nombre de sommets
 \mathbf{p}_i : $i^{\text{ième}}$ sommet du contour ($\mathbf{p}_i = (p_{x_i}, p_{y_i})^T$) ou du maillage ($\mathbf{p}_i = (p_{x_i}, p_{y_i}, p_{z_i})^T$)
 V_i : ensemble des sommets voisins du $i^{\text{ième}}$ sommet du maillage
 F_i : ensemble des triangles voisins du $i^{\text{ième}}$ sommet du maillage

Domaines

\mathcal{D} : domaine de définition de l'image
 Ω : domaine de définition des paramètres u et (u, v)
 R_{in} : région intérieure
 R_{out} : région extérieure
 \mathcal{B}_{in} : bande intérieure
 \mathcal{B}_{out} : bande extérieure

Propriétés des domaines

$\mathcal{A}(R)$: aire de la région R si $R \subset \mathbb{R}^2$
 $\mathcal{V}(R)$: volume de la région R si $R \subset \mathbb{R}^3$
 $\mu(R)$: moyenne des intensités de la région R
 $\sigma^2(R)$: variance des intensités de la région R
 $\hat{\mu}(R)$: estimateur de la moyenne des intensités de la région R
 $\hat{\sigma}^2(R)$: estimateur de variance des intensités de la région R

Chapitre 1

Introduction

Comprendre une image, c'est en premier lieu être apte à distinguer les différents éléments qui la composent. De nombreux systèmes d'acquisition produisent des images numériques fixes ou dynamiques : appareils photo, caméscope, scanner... Nous nous intéressons plus particulièrement au domaine de l'imagerie médicale, dans lequel les techniques d'acquisition telles que l'Imagerie par Résonance Magnétique (IRM) ou le scanner à rayons X permettent de générer des images bidimensionnelles (2D) et tridimensionnelles (3D). Ces images peuvent également être dynamiques, le temps étant dans ce cas considéré comme une dimension à part entière. On parle alors de séquences 2D+T ou 3D+T selon la dimension des images. L'étude d'un objet précis dans cette image implique de déterminer d'une manière ou d'une autre les pixels qui composent cet objet ou son contour. Cette étape est nécessaire pour extraire des informations comme l'aire ou la géométrie globale. Une image 2D étant une grille rectangulaire constituée de pixels, une image 3D est par extension un pavé constitué de *voxels* (abréviation de *volumic element*). Les images volumiques sont le plus souvent construites par un empilement de coupes bidimensionnelles. Dans ce type d'images, déterminer les voxels d'une structure d'intérêt permet non seulement l'étude quantitative de cette structure mais également sa visualisation. En effet, si ce traitement n'est pas appliqué, l'utilisateur ne dispose que d'une succession de coupes et est par conséquent obligé de se représenter mentalement l'objet en trois dimensions. Isoler manuellement les structures présentes dans les images est un travail fastidieux. Ceci est d'autant plus vrai lorsque la dimension de ces images augmente, d'où l'intérêt des méthodes permettant d'automatiser tout ou partie de cette tâche.

Le processus de segmentation consiste à isoler une ou plusieurs structure(s) d'intérêt présente(s) dans une image. La segmentation est un aspect fondamental de l'analyse d'image et constitue bien souvent le premier maillon d'une chaîne de reconnaissance. A partir des régions obtenues dans l'image, il est par exemple possible d'extraire des primitives sur la couleur, la texture ou encore la forme des objets en vue de développer un système d'indexation. Il est courant de classer les méthodes de segmentation en deux

catégories : les approches contour (ou frontière) et les approches région. Les approches contour abordent la segmentation comme la recherche des frontières entre les objets et le fond. Elles font intervenir la notion de dérivation, car les frontières recherchées correspondent aux zones de fortes variations d'intensité. Les approches les plus anciennes se basent sur des filtres détecteurs de contour (Sobel, Canny, ...). Il est à noter que ces filtres dérivateurs ne réalisent pas une segmentation à proprement parler, car il est généralement nécessaire d'appliquer des algorithmes de chaînage afin de connecter les points de contour estimés et pouvoir ainsi délimiter les structures. À l'inverse, les approches région réalisent la segmentation en partitionnant l'image en zones vérifiant un critère d'homogénéité. Ce critère concerne généralement l'intensité des pixels mais des caractéristiques de plus haut niveau comme la texture peuvent également être considérées. Les méthodes appartenant à cette catégorie sont par exemple la croissance de région, les champs de Markov, les algorithmes de type division/fusion (*split and merge*) ainsi que les approches issues de la morphologie mathématique comme la ligne de partage des eaux.

Les approches citées réalisent une segmentation globale de l'image en se basant uniquement sur des caractéristiques basées sur les pixels. La notion de forme n'est pas intégrée dans le processus de segmentation, ce qui peut être un inconvénient lorsque l'on cherche à déterminer les frontières d'un objet en particulier. De plus, dans le cas d'images réelles, les données sont généralement incertaines pour diverses raisons : dégradation par le bruit, frontières indistinctes dues à un phénomène de flou, problèmes d'occultations... La segmentation ne peut plus être réalisée selon des critères bas niveau relatifs aux pixels. L'introduction d'un modèle de la forme recherchée est alors nécessaire. Dans ce contexte, les modèles déformables tels que les contours actifs permettent l'adjonction de contraintes et de connaissances *a priori* sur les objets à segmenter. Un modèle déformable est une structure géométrique évoluant itérativement de manière à s'ajuster aux frontières des objets recherchés. Le modèle déformable est généralement représenté par une courbe dans une image 2D ou une surface dans une image 3D. La forme et la position initiale de la courbe ou de la surface sont fournies de manière manuelle ou automatique. Dans le formalisme des modèles déformables, la segmentation est la plupart du temps formulée comme un problème d'optimisation, le but étant de déterminer la courbe ou la surface minimisant une fonction objectif. Cette fonction, souvent appelée énergie, est la traduction mathématique des propriétés recherchées sur les objets à segmenter. De façon générale, l'énergie est composée de termes internes relatifs à la régularité géométrique du modèle et de termes externes qui mettent en relation le modèle et l'image. Ainsi, la segmentation par modèle déformable a l'avantage d'être un compromis entre régularisation et adéquation aux données.

Les modèles déformables peuvent être classés selon trois aspects fondamentaux : la représentation, l'évolution et l'attache aux données. La représentation est la manière dont le modèle est implémenté. Si l'on considère une courbe déformable 2D, une des implémentations les plus naturelles est un ensemble de points connectés. Il existe cependant d'autres méthodes de représentation telles que les contours implicites basés sur les ensembles de niveaux. Quelle que soit la représentation, il est nécessaire de déformer le

modèle. C'est le rôle de la méthode d'évolution, qui effectue généralement une minimisation numérique de la fonctionnelle d'énergie. Enfin, l'attache aux données désigne le type d'énergie externe utilisé pour lier le modèle aux données présentes dans l'image. On distingue notamment les termes basés contour, qui tiennent compte d'informations locales sur les variations d'intensité (gradient), et les termes basés région, qui reposent sur des caractéristiques globales des régions délimitées par le modèle.

Dans cette thèse, nous contribuons à étendre les modèles déformables selon ces trois axes principaux. Au niveau de la représentation, nous développons un modèle de contour actif pour la segmentation 2D et un modèle de surface active pour la segmentation 3D. Nous décrivons ces deux modèles à l'aide d'un formalisme unifié, le modèle de surface pouvant être considéré comme une extension naturelle du contour actif. Nous généralisons également le modèle de surface au problème de segmentation et suivi 3D+T, c'est-à-dire dans des séquences d'images tridimensionnelles. Au niveau de l'évolution, nous proposons un ensemble d'optimisations pour la déformation des contours et des surfaces. Ces améliorations portent sur l'algorithme glouton, une méthode de minimisation numérique de la fonctionnelle d'énergie, qui permet de réaliser l'optimisation de toute la courbe/surface par un ensemble d'optimisations locales. Concernant l'attache aux données, nous développons un nouveau terme basé région, que nous appelons énergie de région en bande étroite. Ce terme combine des caractéristiques locales et globales des structures d'intérêt et présente des avantages tant au niveau calculatoire qu'au niveau de la cohérence par rapport aux données. Le manuscrit est organisé de la façon suivante :

- Le chapitre 2 comporte un état de l'art des modèles déformables en segmentation 2D et 3D. Ils sont présentés selon les trois critères fondamentaux que nous venons d'énoncer : représentation, évolution et attache aux données. Dans la littérature, ces critères ont été combinés, donnant lieu ainsi à de nombreuses variantes. Nous discutons de la pertinence du choix de tel ou tel critère en vue d'une application donnée.
- Le chapitre 3 présente nos modèles de base. L'un est dédié à la segmentation d'images bidimensionnelles et s'apparente au modèle de contour actif paramétrique. L'autre est une surface active implémentée en maillage triangulaire et est dédié à la segmentation de données tridimensionnelles. Ces modèles sont des représentations explicites discrètes, car ils définissent localement la forme de l'objet par un ensemble de sommets. Bien que nos modèles soient différents de par la dimension des espaces dans lesquels ils évoluent, nous les décrivons à l'aide d'un formalisme unifié. Les modèles présentés dans ce chapitre sont uniquement basés contour et sont déformés par algorithme glouton. Grâce à une technique de reparamétrisation, nous assurons la flexibilité géométrique de nos modèles.
- Au chapitre 4, nous envisageons nos modèles déformables en terme de performances. Nous proposons des améliorations de l'algorithme glouton afin d'accélérer le processus de segmentation. Ces améliorations portent notamment sur les espaces de re-

cherche dans lesquels l'énergie est minimisée. La notion d'amélioration implique celle de comparaison. Nos méthodes doivent apporter un gain en temps de calcul sans dégradation des résultats, ce qui soulève notamment le problème de l'évaluation de la segmentation. Pour cela, nous nous intéressons aux mesures objectives basées sur la distance de Hausdorff entre les frontières de références et les frontières estimées par modèle déformable. Nous confrontons également notre méthode avec un algorithme d'évolution alternatif, l'approche physique, ainsi qu'avec les ensembles de niveaux.

- Nous développons au chapitre 5 un nouveau type de terme de région : l'énergie de région en bande étroite. En effet, l'attache aux données basée uniquement contour est limitée dans le cas de la segmentation d'images réelles, tandis que les termes basés région classiques impliquent l'admission d'hypothèses contraignantes sur l'intensité des objets. Par ailleurs, ces énergies de région posent des problèmes d'implémentation. En nous basant sur le fait que de nombreuses structures d'intérêt sont segmentables par des critères région uniquement à proximité de leurs frontières, notre énergie de région en bande étroite combine des caractéristiques globales et locales. Une approximation, basée sur la théorie des courbes et surfaces parallèles, permet une implémentation aisée de cette énergie sur nos modèles 2D et 3D. Nous étudions également la minimisation de notre énergie de région en utilisant le calcul variationnel.
- Enfin, le chapitre 6 présente une extension de notre surface pour le suivi d'objets déformables dans des séquences 3D. Cette extension est appliquée au suivi du mouvement du ventricule gauche au cours du cycle cardiaque en Imagerie par Résonance Magnétique (IRM). Le modèle présenté est une surface temporelle de topologie cylindrique. Nous introduisons notamment la notion de lissage temporel qui assure la régularité du mouvement de la surface au cours du temps. La méthode est validée sur une base de séquences cardiaques acquises sur des patients sains et pathologiques. Les expérimentations comportent une comparaison avec les vérités terrain ainsi qu'une étude de la fraction d'éjection, paramètre quantitatif essentiel dans l'étude de la fonction cardiaque.

Chapitre 2

Modèles déformables en segmentation 2D et 3D

La segmentation consiste à isoler les différentes régions d'intérêt d'une image. En présence de données incertaines, où les critères bas niveau comme l'intensité des pixels sont insuffisants pour discriminer efficacement les structures, l'introduction d'un modèle dans le processus de segmentation est indispensable. Les modèles déformables, introduits dans les travaux de Terzopoulos [Ter86] [TF88] et Kass [KWT88], sont des outils généraux et puissants pour la segmentation d'images. Leur supériorité par rapport à d'autres approches réside dans leur capacité à gérer l'incertitude présente dans l'image, en ajoutant des contraintes de façon à appréhender les différents obstacles à la segmentation : bruit, contours mal définis ou discontinus, occultations... Leur champ d'application est vaste, allant de la reconstruction de structures anatomiques en imagerie médicale au suivi d'objets dans des séquences vidéo, en passant par la synthèse d'images et l'animation. Un modèle déformable est une structure géométrique qui, à partir d'une configuration initiale dans l'image, évolue itérativement jusqu'à venir s'ajuster aux frontières de la ou des région(s) d'intérêt que l'on souhaite segmenter. Il s'agit donc d'une approche frontière, par opposition aux approches région, qui effectuent plutôt une classification des points de l'image pour les affecter à une région donnée.

Nous présentons dans ce chapitre un état de l'art des modèles déformables, guidé par ces interrogations : comment le modèle est-il implémenté ? Quelle est la structure manipulée ? Comment cette structure est-elle déformée ? Comment le modèle est-il mis en relation avec les données présentes dans l'image ? Les modèles déformables sont ainsi décrits selon les critères suivants :

- **Réprésentation** : les modèles déformables ont été développés selon de nombreuses représentations (on parle également d'implémentation). A titre d'exemple, il existe une distinction très marquée entre les modèles explicites, comme les surfaces trian-

gulées [LM99] et les surfaces implicites implémentées avec la méthode des ensembles de niveaux [MSV95]. Une représentation comporte un ensemble de variables qui sont modifiées itérativement par une méthode d'évolution, l'objectif étant de déterminer les valeurs de ces variables conduisant à la segmentation la plus satisfaisante.

- **Evolution** : à partir d'une position initiale dans l'image, le modèle est déformé de façon à s'ajuster aux frontières de la ou des structure(s) d'intérêt que l'on souhaite segmenter. L'évolution est souvent formulée comme un problème d'optimisation, dans lequel la segmentation des zones d'intérêt est effectuée par minimisation d'une fonctionnelle d'énergie. L'évolution de la surface réalise souvent un compromis entre la régularité géométrique du modèle et son adéquation avec les données image. De plus, l'évolution du modèle est plus ou moins guidée par sa représentation.
- **Attache aux données** : la segmentation suppose la mise en relation du modèle avec l'image. La fonctionnelle d'énergie abordée au point précédent comporte un ou plusieurs termes dits "externes" dont l'expression fait intervenir la fonction d'intensité de l'image (ou des caractéristiques plus avancées comme la texture). On distingue principalement les termes basés contour, qui sont le plus souvent relatifs au gradient, et les termes basés région, qui reposent sur des caractéristiques globales de la zone d'intérêt.

La suite du chapitre suit cette décomposition en trois critères. Nous avons réalisé une revue des surfaces déformables dans [MBMC05]. Le lecteur pourra également se référer aux thèses de Lachaud [Lac98], Montagnat [Mon99] et Taton [Tat04] qui comportent des descriptions des modèles déformables.

2.1 Représentation

Nous étudions ici les différents modes de représentation des contours et surfaces déformables. Ces représentations sont des structures ayant chacune des particularités géométriques et topologiques. Le choix de la structure d'un modèle déformable est primordial dans la mesure où il conditionne l'espace des courbes ou des surfaces représentables. Une implémentation pourra représenter des formes plus ou moins complexes. Dans ce qui suit, le modèle déformable Γ est une courbe 2D ou une surface 3D évoluant dans une image définie par sa fonction d'intensité I :

$$\begin{aligned} I &: \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{x} &\longmapsto I(\mathbf{x}) \end{aligned} \tag{2.1}$$

$I(\mathbf{x})$ est l'intensité (le niveau de gris) du point \mathbf{x} . En 2D, le support de l'image \mathcal{D} est une portion de \mathbb{R}^2 et $\mathbf{x} = (x, y)^T$ est un pixel. En 3D, \mathcal{D} est une portion de \mathbb{R}^3 et $\mathbf{x} = (x, y, z)^T$ est alors un voxel (abréviation de *volumic element*).

2.1.1 Modélisation continue

Courbe plane

Le contour actif 2D, ou *snake* introduit par Kass *et al* [KWT88], est modélisé par une courbe paramétrée Γ de vecteur position \mathbf{c} , qui associe à un paramètre spatial u un point $(x, y)^T$:

$$\begin{aligned} \Gamma &: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ u &\longmapsto \mathbf{c}(u) = (x(u), y(u))^T \end{aligned} \quad (2.2)$$

où x et y sont continûment dérivables par rapport à u . Le domaine de définition du paramètre u est normalisé : $\Omega = [0, 1]$. La courbe Γ est généralement simple (elle ne présente pas d'auto-intersection). Bien que ce ne soit pas imposé par la modélisation, un des avantages des modèles déformables est de pouvoir générer des contours fermés. Dans ce cas, la courbe vérifie $\mathbf{c}(0) = \mathbf{c}(1)$. Plusieurs quantités différentielles de la courbe Γ interviennent dans son évolution. Il s'agit par exemple du vecteur tangent $\mathbf{t}(u)$, du vecteur normal $\mathbf{n}(u)$ ou de la courbure $\kappa(u)$. Ces quantités sont explicitées au chapitre suivant.

Surface de l'espace

Un modèle déformable 3D, ou surface active, est représenté par une surface paramétrée Γ de vecteur position \mathbf{s} qui, à un couple de paramètres spatiaux (u, v) , associe un point $(x, y, z)^T$.

$$\begin{aligned} \Gamma &: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto \mathbf{s}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))^T \end{aligned} \quad (2.3)$$

L'espace des paramètres est ici une portion de \mathbb{R}^2 normalisé : $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$. Si la surface est fermée, c'est-à-dire sans bord, les conditions suivantes sont respectées :

$$\begin{aligned} \mathbf{s}(0, v) &= \mathbf{s}(1, v) & \forall v \in [0, 1] \\ \mathbf{s}(u, 0) &= \mathbf{s}(u, 1) & \forall u \in [0, 1] \end{aligned}$$

La sphère et le tore, qui font partie des surfaces représentées en figure 2.1, sont des exemples qui vérifient cette condition.

Comme pour le contour 2D, les caractéristiques rencontrées en géométrie différentielle [dC76], telles que la normale, les tangentes ou les différentes courbures 3D, interviennent dans l'évolution du modèle déformable surfacique. Les représentations continues sont la plupart du temps utilisées pour la formulation théorique du modèle déformable et ne sont pas directement implémentables. L'implémentation proprement dite nécessite une étape de discrétisation de la courbe ou de la surface.

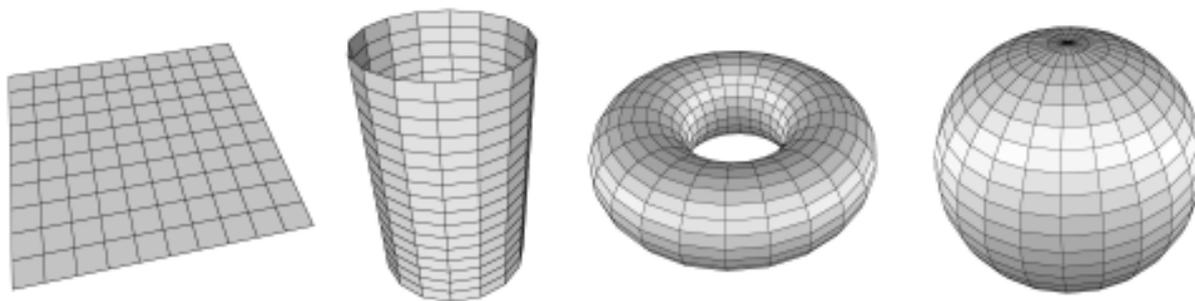


FIG. 2.1 – Surfaces de topologies différentes : plan, cylindre, tore et sphère

2.1.2 Représentations discrètes

Ces représentations discrétisent la courbe ou la surface déformable en un ensemble de sommets interconnectés. Ces sommets constituent un échantillonnage des points de Γ . Les représentations discrètes permettent une approximation naturelle des quantités différentielles comme la normale ou la courbure. On parle également de représentation explicite car le contour ou la surface est manipulé directement, par opposition aux modèles implicites détaillés un peu plus loin. Les modèles discrets présentés ici sont par nature très peu contraints. Ils permettent donc de représenter des contours et des surfaces de géométrie et de topologie arbitraires.

Courbes polygonales

L'implémentation basique d'un contour actif 2D introduite dans [KWT88] est une discrétisation directe de la courbe paramétrée : un polygone composé de n sommets, notés $\mathbf{p}_i = (p_{x_i}, p_{y_i})^T$, $1 \leq i \leq n$. Le polygone peut être considéré comme une courbe linéaire par morceaux. Les sommets du polygone échantillonnent les points de la courbe continue. Dans le cas d'un échantillonnage régulier sur Ω , on a

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{c} \left(\frac{i-1}{n} \right) \quad (2.4)$$

Le sommet \mathbf{p}_i est connecté aux sommets \mathbf{p}_{i-1} et \mathbf{p}_{i+1} par des arêtes. Si le polygone est la discrétisation d'une courbe fermée, les sommets \mathbf{p}_1 et \mathbf{p}_n sont connectés. Le nombre de sommets est amené à changer au fur et à mesure de l'évolution. On parle alors de reparamétrisation ou de rééchantillonnage de la courbe. La courbe polygonale permet de représenter toutes les courbes ouvertes ou fermées. Les variables de cette représentation sont les coordonnées des sommets. Ce sont ces coordonnées qui seront directement modifiées par la méthode d'évolution.

Il est à noter que les courbes polygonales ne sont pas nécessairement fermées ou

connexes. Des techniques de changement de topologie, permettant à la courbe polygonale de se scinder ou de fusionner durant sa déformation, ont été développées dans [PTFS00], [MT95b] et [DM01].

Maillages

Dans un domaine discret, une surface est représentée par un maillage, composé d'un ensemble de n sommets $\mathbf{p}_i = (p_{xi}, p_{yi}, p_{zi})^T$, $1 \leq i \leq n$ (les données géométriques, i.e. les points appartenant à la surface) et d'un ensemble d'arêtes liant les sommets (les données topologiques). Les maillages sont en quelque sorte une extension 3D des contours polygonaux.

Une arête ne reliant que deux sommets, et deux sommets n'étant reliés que par au plus une arête, les relations de voisinage peuvent être représentées par des ensembles. Par la suite, on notera V_i le voisinage de \mathbf{p}_i , soit l'ensemble des sommets connectés à \mathbf{p}_i . Les propriétés intéressantes de voisinage peuvent être formulées à l'aide de notions de théorie des graphes [GM79], car l'ensemble des sommets et des arêtes d'un maillage forment un graphe non orienté. La relation de voisinage est symétrique : si le sommet \mathbf{p}_j est voisin de \mathbf{p}_i alors \mathbf{p}_i est nécessairement voisin de \mathbf{p}_j :

$$j \in V_i \Leftrightarrow i \in V_j, \forall (i, j), 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n, i \neq j \quad (2.5)$$

De plus, un sommet ne peut être son propre voisin :

$$i \notin V_i, \forall i, 1 \leq i \leq n \quad (2.6)$$

Si deux sommets sont reliés, ils ne le sont que par au plus une arête, donc tout cycle comporte au moins trois sommets. Comme pour les courbes polygonales, les variables des représentations par maillage sont les coordonnées des sommets eux-mêmes. Deux types de maillage discret ont été principalement utilisés pour la segmentation d'images tridimensionnelles : les maillages triangulaires et les maillages simplexes. La figure 2.3 montre une surface sphérique discrétisée avec un maillage triangulaire (gauche) et un maillage simplexe (centre). Les propriétés de ces types de maillage sont décrites ci-dessous.

• Maillages triangulaires

Les travaux de Vasilescu et Terzopoulos [VT92], McInerney et Terzopoulos [MT93] et Huang et Goldgof [HG93] sont parmi les premiers à se baser sur des maillages triangulaires pour la reconstruction d'objets dans des images 3D. Dans un maillage triangulaire, les sommets ont au moins trois voisins :

$$\text{card}(V_i) \geq 3, \forall i, 1 \leq i \leq n \quad (2.7)$$

Les sommets composent ainsi un ensemble de triangles adjacents. Un cycle de quatre sommets admet toujours une arête reliant deux sommets non-adjacents. Quelle que soit la topologie globale de la surface, le sous-graphe composé du voisinage d'un sommet \mathbf{p}_i est connexe. Si on considère deux sommets quelconques de ce voisinage, il existe toujours un chemin les reliant et ne passant que par des sommets de ce voisinage. Dans un maillage fermé, le sous-graphe composé des sommets voisins d'un sommet \mathbf{p}_i est généralement un cycle : dans la figure 2.2, le voisinage de \mathbf{p}_i est $V_i = \{j_1, j_2, \dots, j_6\}$. Si l'on exclut les arêtes qui ne relient pas deux sommets de cet ensemble, les sommets $[\mathbf{p}_{j_1}, \mathbf{p}_{j_2}, \dots, \mathbf{p}_{j_6}]$ forment un cycle.

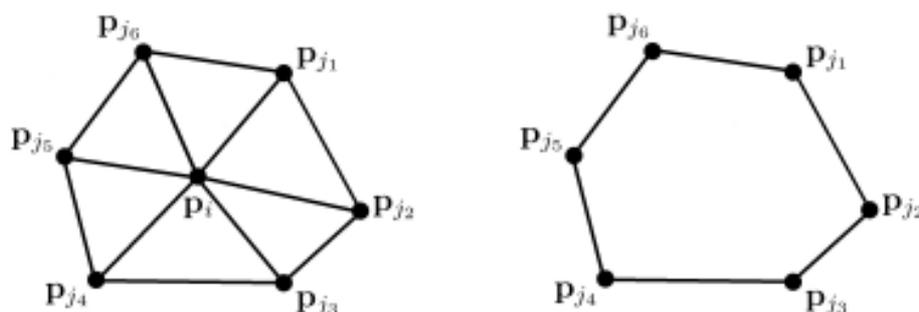


FIG. 2.2 – Le sous-graphe composé des sommets du voisinage de \mathbf{p}_i est un cycle

Les maillages triangulaires constituent la représentation discrète la plus largement utilisée en segmentation de données volumiques. Dans les travaux de Lachaud [Lac98] [LM99] et Taton [Tat04], des modèles surfaciques multi-résolutions sont développés. Kaus *et al* [KVBW⁺04] les utilisent avec un mécanisme de recalage semi-rigide pour la reconstruction du cœur en IRM tridimensionnelle. Lötjönen *et al* [LRMK99] reconstruisent diverses structures anatomiques (poumons, foie, cerveau) à l'aide de ces maillages, également à partir d'IRM 3D. McInerney et Terzopoulos [MT95a] les utilisent conjointement avec une méthode par éléments finis (détaillée dans la section suivante).

L'approche développée par Lachaud et Montanvert [LM99] et les T-surfaces de McInerney et Terzopoulos [MT99] permettent de gérer les changements de topologie sur des surfaces discrètes. Le modèle de maillage triangulaire étant partie intégrante de nos travaux, il sera plus amplement détaillé au chapitre suivant.

• Maillages simplexes

Les maillages simplexes ont été introduits par Delingette [Del94b; Del94a]. Dans un k -maillage simplexe, chaque sommet est connecté à $k + 1$ autres sommets. Les structures utilisées pour la segmentation 3D sont les 2-maillages simplexes. Dans un 2-maillage sim-

plexe, chaque sommet possède exactement trois voisins :

$$\text{card}(V_i) = 3, \quad \forall i, 1 \leq i \leq n \quad (2.8)$$

Les facettes adjacentes formées par les sommets sont le plus souvent des hexagones. D'un point de vue topologique, un 2-maillage simplexe est l'équivalent dual d'un maillage triangulaire. Ainsi, la conversion d'un maillage simplexe en un maillage triangulaire est assez naturelle, et inversement. Sur la figure 2.3 (droite), les maillages triangulaire et simplexe d'une sphère sont superposés : à chaque sommet du maillage simplexe correspond un triangle du maillage triangulaire, tandis qu'à chaque facette (ici, des hexagones) du maillage simplexe correspond un sommet du maillage triangulaire.

L'avantage des maillages simplexes par rapport aux maillages triangulaires est de fournir une structure dans laquelle l'estimation de certaines quantités différentielles est simplifiée. Ainsi, le vecteur normal au sommet \mathbf{p}_i se calcule de la façon suivante :

$$\mathbf{n}_i = \frac{\mathbf{p}_{j_1} \wedge \mathbf{p}_{j_2} + \mathbf{p}_{j_2} \wedge \mathbf{p}_{j_3} + \mathbf{p}_{j_3} \wedge \mathbf{p}_{j_1}}{\|\mathbf{p}_{j_1} \wedge \mathbf{p}_{j_2} + \mathbf{p}_{j_2} \wedge \mathbf{p}_{j_3} + \mathbf{p}_{j_3} \wedge \mathbf{p}_{j_1}\|} \quad (2.9)$$

j_1, j_2 et j_3 étant les indices des sommets voisins de \mathbf{p}_i : $V_i = \{j_1, j_2, j_3\}$.

Les maillages simplexes ont été utilisés en segmentation 3D [Del99; Xu99] et 4D (séquences d'images 3D) [Mon99; MD05]. Bloch *et al* [BCCG05] puis Colliot *et al* [CCB06] réalisent la segmentation des structures cérébrales en IRM à l'aide de relations spatiales floues incorporées dans la déformation de maillages simplexes.

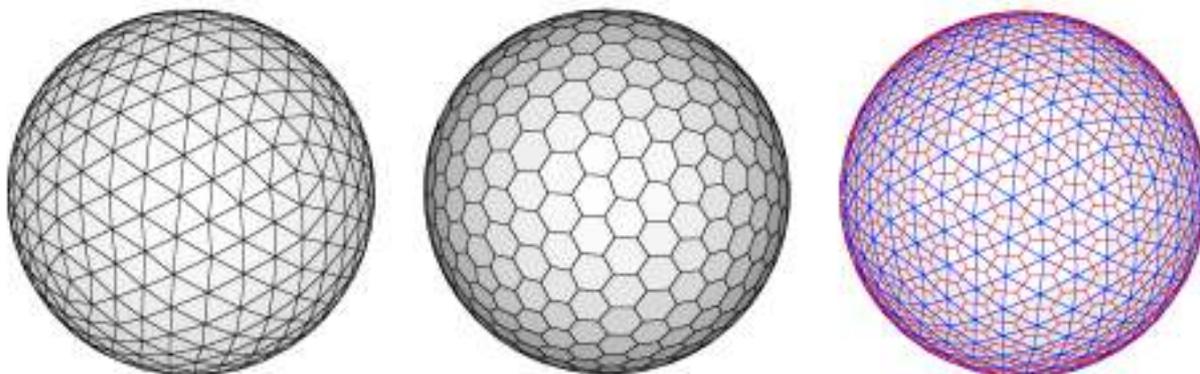


FIG. 2.3 – Sphère discrétisée en maillage triangulaire (gauche) et maillage simplexe (centre). Dualité "face \leftrightarrow sommet" entre les deux maillages (droite).

2.1.3 Représentations paramétrées

Un modèle déformable paramétré est représenté par une famille de fonctions. Il s'agit d'une représentation plus restrictive que les contours discrets et les maillages. L'ensemble

des contours et surfaces pouvant être générées à l'aide de ce type de représentation est plus réduit. Généralement, cette limitation dans les formes représentables est une caractéristique souhaitée, en vue d'une certaine application. Un modèle paramétré est à privilégier lorsque l'on dispose d'un fort *a priori* sur la géométrie et la topologie des objets que l'on souhaite segmenter.

Contours B-splines

L'emploi des B-splines dans les contours actifs, introduit initialement dans [MSMM90], permet de remédier aux problèmes de régularité et de paramétrisation des courbes polygonales. Ces dernières, si elles ne sont pas rééchantillonnées au fur et à mesure de la déformation, rendent difficile la reconstruction de frontières lisses ou éloignées de la position initiale du contour.

Les courbes splines les plus répandues sont les B-splines cubiques uniformes. Le contour est représenté par une séquence de n points de contrôle $\mathbf{q}_i = (q_{x_i}, q_{y_i})^T$, $1 \leq i \leq n$. Le contour déformable est découpé en n segments de courbe \mathbf{c}_i , $1 \leq i \leq n$ reliés par des points de jonction \mathbf{p}_i , $1 \leq i \leq n$. Le domaine Ω étant divisé en n intervalles, chaque segment \mathbf{c}_i est une combinaison linéaire de quatre polynômes cubiques du paramètre local $u_i \in \Omega$ qui varie sur le $i^{\text{ème}}$ intervalle. La courbe B-spline est dite uniforme si les paramètres u_i sont régulièrement espacés sur Ω . L'expression d'un point sur le segment \mathbf{c}_i s'écrit

$$\mathbf{c}_i(u_i) = \mathbf{M}(u_i) \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{i-1} \\ \mathbf{q}_i \\ \mathbf{q}_{i+1} \\ \mathbf{q}_{i+2} \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

La matrice contenant les points de contrôle est de taille 2×4 , tandis que \mathbf{M} est une matrice 1×4 construite à partir des polynômes cubiques de u .

$$\mathbf{M}(u) = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Il est important de noter que les points de contrôle \mathbf{q}_i ne sont pas sur la courbe, contrairement aux points de jonction. Les points de contrôle \mathbf{q}_i sont les variables de la représentation, car ce sont leurs coordonnées qui sont modifiées par la méthode d'évolution. La courbe générée a la propriété intéressante d'être de classe C^2 aux points de jonctions. Contrairement à une courbe de Bézier, le déplacement d'un point de contrôle n'influence que les segments qui lui sont proches. Alors que les courbes polygonales ont besoin de termes de régularisation lors de leur évolution, les contours B-splines sont réguliers par nature et ne nécessitent pas de mécanisme de lissage supplémentaire. De plus, ils permettent de décrire

des courbes lisses avec peu de points de contrôle, le nombre de variables est donc moins important que pour un contour discrétisé en polygone. Par ailleurs, il est possible d'ajouter des points de contrôles en cours de déformation pour pouvoir ajuster le contour à des données demandant une forte courbure. Dans [WT05], un modèle de contour actif basé sur les B-splines cubiques est utilisé pour la segmentation d'IRM cérébrales.

Surfaces B-splines

De la même façon que les contours 2D, les surfaces peuvent être représentées par un ensemble de fonctions B-splines. Chen et Teoh [CT05] introduisent le modèle de B-surface, en proposant de modéliser une surface de topologie sphérique à l'aide de B-splines bicubiques uniformes. Comme l'espace des paramètres est de dimension 2, on dispose d'une grille de $n \times m$ points de contrôle $\mathbf{q}_{i,j}$, $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$. La surface est découpée en $n \times m$ éléments surfaciques $\mathbf{s}_{i,j}$, $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$. Un élément de surface $\mathbf{s}_{i,j}$ est une combinaison linéaire de B-splines bicubiques des paramètres locaux u_i et v_i :

$$\mathbf{s}_{i,j}(u_i, v_j) = \mathbf{M}(u_i)\mathbf{Q}_{i,j}\mathbf{M}(v_j)^T \quad (2.12)$$

La matrice $\mathbf{Q}_{i,j}$ est constituée des coordonnées des 16 points de contrôles utiles à la construction de l'élément de surface $\mathbf{s}_{i,j}$.

$$\mathbf{Q}_{i,j} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{i-1,j-1} & \mathbf{q}_{i-1,j} & \mathbf{q}_{i-1,j+1} & \mathbf{q}_{i-1,j+2} \\ \mathbf{q}_{i,j-1} & \mathbf{q}_{i,j} & \mathbf{q}_{i,j+1} & \mathbf{q}_{i,j+2} \\ \mathbf{q}_{i+1,j-1} & \mathbf{q}_{i+1,j} & \mathbf{q}_{i+1,j+1} & \mathbf{q}_{i+1,j+2} \\ \mathbf{q}_{i+2,j-1} & \mathbf{q}_{i+2,j} & \mathbf{q}_{i+2,j+1} & \mathbf{q}_{i+2,j+2} \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

La matrice \mathbf{M} contient les polynômes cubiques en u et v :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(u) &= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{M}(v) &= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} v^3 & v^2 & v & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Contrairement au contour B-spline 2D, le modèle de B-surface a l'inconvénient de ne pas permettre le ré-échantillonnage. En effet, il est impossible d'ajouter des points de contrôles à certains endroits sans être obligé de redimensionner toute la grille de discrétisation. La surface finale est donc limitée par le choix du nombre de points de contrôle. Dans [CT05], une B-surface est mise en oeuvre pour la reconstruction de structures cérébrales dans des données IRM tridimensionnelles.

Superquadriques

Les superquadriques, introduites par Barr [Bar81], ont été utilisées en reconstruction de surfaces dans [TM91] et [MT91]. Dans [BCA96a] et [BCA96b], les déformations du ventricule gauche dans des séquences échographiques ont été suivies à l'aide d'une approche basée sur les superquadriques. Parmi les superquadriques les plus fréquemment utilisées, les superellipsoïdes sont définies par l'équation paramétrique suivante :

$$\mathbf{s}_q(u, v) : \begin{cases} x(u, v) &= a_1 \text{signe}(\cos(2\pi u) \cos(\pi v)) |\cos(2\pi u) \cos(\pi v)|^{\epsilon_1} \\ y(u, v) &= a_2 \text{signe}(\cos(2\pi u) \sin(\pi v)) |\cos(2\pi u) \sin(\pi v)|^{\epsilon_2} \\ z(u, v) &= a_3 \text{signe}(\sin(\pi v)) |(2\pi u) \sin(\pi v)|^{\epsilon_3} \end{cases} \quad (2.15)$$

On remarque qu'une sphère de rayon r est une superellipsoïde pour laquelle $a_1 = a_2 = a_3 = r$ et $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = 1$:

$$\mathbf{s}(u, v) : \begin{cases} x(u, v) &= r \cos(2\pi u) \cos(\pi v) \\ y(u, v) &= r \cos(2\pi u) \sin(\pi v) \\ z(u, v) &= r \sin(2\pi u) \end{cases} \quad (2.16)$$

Les variables $a_1, a_2, a_3, \epsilon_1, \epsilon_2$ et ϵ_3 définissent la famille de surface. Une superquadrique peut également être définie de façon implicite :

$$F_{\mathbf{s}_q}(\mathbf{x}) = \left| \frac{x}{a_1} \right|^{\frac{2}{\epsilon_1}} + \left| \frac{y}{a_2} \right|^{\frac{2}{\epsilon_2}} + \left| \frac{z}{a_3} \right|^{\frac{2}{\epsilon_3}} \quad (2.17)$$

Dans le cas d'une formulation implicite, le point $\mathbf{x} = (x, y, z)^T \in \mathcal{D}$ appartient à la surface si $F_{\mathbf{s}}(\mathbf{x}) = 1$.

De façon générale, un modèle de superquadrique subit une déformation globale par modifications des variables $a_1, a_2, a_3, \epsilon_1, \epsilon_2$ et ϵ_3 . Afin de permettre une déformation à la fois globale et locale, Terzopoulos et Metaxas [TM91] ajoutent à la superquadrique \mathbf{s}_q une transformation composée d'une rotation \mathbf{R} et d'un champ de déplacement \mathbf{d} :

$$\mathbf{s}'_q = \mathbf{R}(\mathbf{s}_q(u, v) + \mathbf{d}(u, v)) \quad (2.18)$$

Un modèle de superquadrique est déformé par modifications de son vecteur de paramètres alors qu'un modèle basé sur un maillage est déformé par modification des coordonnées des sommets \mathbf{p}_i , dont le nombre peut devenir très important dans le cas d'une région d'intérêt de grande taille ou d'une résolution image élevée. Le nombre de variables à déterminer sur un modèle paramétré est donc beaucoup plus réduit que sur un modèle discret, ce qui est un avantage en terme de complexité algorithmique. Par contre, cela se fait au détriment de la flexibilité géométrique, dans la mesure où le panel de surfaces représentables est plus restreint que pour les maillages.

Représentation harmonique

La représentation de Fourier développée par Staib et Duncan [SD92] décrit le contour 2D Γ comme une somme de H harmoniques :

$$\mathbf{c}(u) = \begin{bmatrix} x(u) \\ y(u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 \\ c_0 \end{bmatrix} + \sum_{h=1}^H \begin{bmatrix} a_h & b_h \\ c_h & d_h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(2\pi hu) \\ \sin(2\pi hu) \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

où (a_0, c_0) est le centre de gravité de Γ . Plus le contour est lisse, moindre sera le nombre d'harmoniques nécessaires pour le décrire précisément. Ce modèle a été utilisé conjointement avec une approche texture reposant sur les champs de Markov aléatoires [CSD96]. Ici, l'évolution du contour est effectuée sur les variables $[a_0, b_0, a_1, b_1, c_1, d_1, \dots, a_H, b_H, c_H, d_H]$. Ce modèle est étendu aux surfaces en utilisant les harmoniques sphériques [Li02; LH04]. La surface est décrite en terme de coordonnées sphériques, où le rayon r est une somme d'harmoniques :

$$r(u, v) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l c_{l,m} Y_{l,m}(u, v) \quad (2.20)$$

La fonction harmonique $Y_{l,m}$ s'écrit :

$$Y_{l,m}(u, v) = (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_{l,m}(\cos \pi u) \exp(i2\pi mv) \quad (2.21)$$

où les $P_{l,m}$ sont les fonctions de Legendre associées [Li02]. Les variables de la représentation sont les coefficients $c_{l,m}$. Le passage des coordonnées sphériques en coordonnées cartésiennes est le suivant :

$$\mathbf{s}(u, v) : \begin{cases} x(u, v) &= r(u, v) \sin(\pi u) \cos(2\pi v) \\ y(u, v) &= r(u, v) \sin(\pi u) \sin(2\pi v) \\ z(u, v) &= r(u, v) \cos(\pi u) \end{cases} \quad (2.22)$$

2.1.4 Ensembles de niveaux

Une surface peut être représentée de façon implicite, c'est-à-dire par l'ensemble des iso-valeurs d'une fonction à valeur dans \mathbb{R} . La méthode implicite la plus utilisée à ce jour est la représentation par ensembles de niveaux, développée par Osher et Sethian [OS88]. La surface Γ est alors vue comme le niveau zéro d'une fonction ψ définie sur \mathcal{D} , le même support que celui de la fonction image. Cette formulation étant indépendante de la dimension de l'image, nous pouvons donc décrire un modèle implicite 2D ou 3D de la même manière. Pour permettre son évolution ultérieure, la fonction ψ est également dépendante du temps :

$$\begin{aligned} \psi &: \mathcal{D} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ &(\mathbf{x}, t) \longmapsto \psi(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (2.23)$$

A un instant donné t , la surface Γ est définie comme l'ensemble des points \mathbf{x} vérifiant la condition

$$\Gamma = \{\mathbf{x} | \psi(\mathbf{x}, t) = 0\} \quad (2.24)$$

Un choix habituel pour l'initialisation de $\psi(\mathbf{x})$ est la distance euclidienne signée qui sépare \mathbf{x} de la surface Γ . Le signe dépend de l'appartenance du point \mathbf{x} à l'intérieur ou à l'extérieur de Γ . Sur la figure 2.4 en particulier, la région R_{in} est l'ensemble des points pour lesquels ψ est positive :

$$R_{in} = \{\mathbf{x} | \psi(\mathbf{x}, t) \geq 0\} \quad (2.25)$$

En utilisant la distance euclidienne signée, la fonction d'ensembles de niveaux peut donc être initialisée comme suit :

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathbf{x} \in \Gamma \\ \inf_{\mathbf{y} \in \mathcal{D}} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| & \text{si } \mathbf{x} \in R_{in} \\ -\inf_{\mathbf{y} \in \mathcal{D}} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| & \text{si } \mathbf{x} \notin R_{in} \end{cases} \quad (2.26)$$

La fonction ψ est discrétisée sur une grille généralement de même taille que celle de l'image. Les variables qui vont être modifiées par la méthode d'évolution sont les niveaux de la fonctions ψ en chaque point de \mathcal{D} .

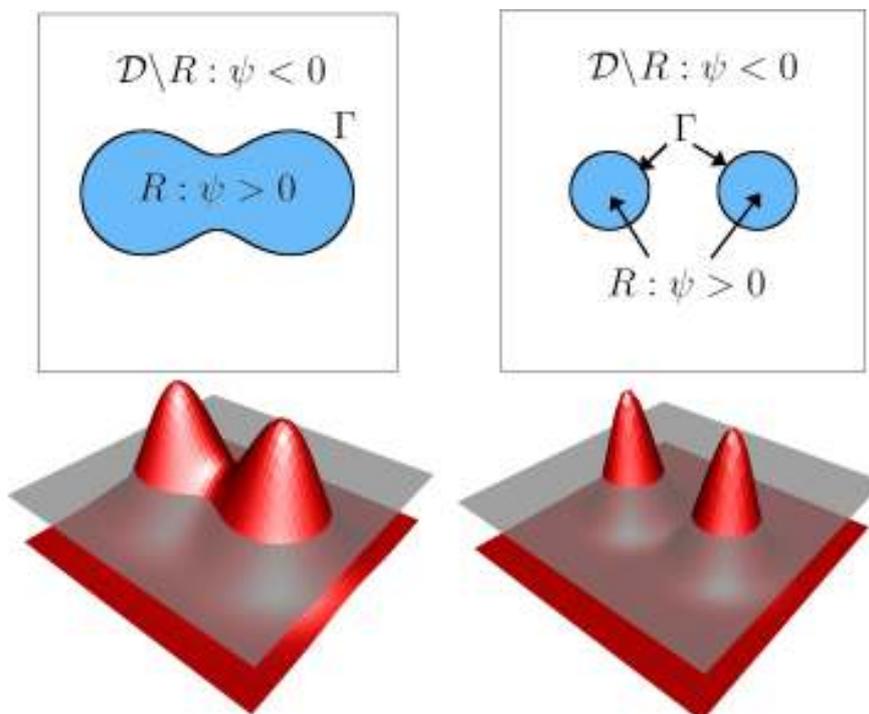


FIG. 2.4 – Fonction d'ensembles de niveaux

Un avantage souvent évoqué par rapport aux implémentations explicites est la gestion naturelle des changements de topologie. En effet, la surface Γ peut se séparer ou fusionner

librement au cours de l'évolution de ψ , comme illustré en figure 2.4. Dans ce cas, les valeurs de la fonction ψ diminuent globalement, ce qui a pour effet de séparer la région R en deux composantes connexes. La grille de discrétisation évite les problèmes de reparamétrisation. De plus, le formalisme des ensembles de niveaux est aisément étendu à des problèmes de dimension supérieure.

L'inconvénient majeur de cette représentation est la complexité algorithmique de son évolution, qui est directement fonction de la taille de l'image. Par ailleurs, elle est moins intuitive qu'une représentation par maillage ou par surface paramétrée. L'intégration de contraintes supplémentaires dans l'évolution de la surface est plus complexe, car cette dernière n'est pas directement manipulée, comme elle l'est dans un maillage.

Le modèle géométrique de Kimmel [Kim03] est une implémentation 3D des ensembles de niveaux. On peut trouver de nombreux travaux appliquant les ensembles de niveaux en imagerie médicale tridimensionnelle : dans [BHB01] et [CB06], ils sont utilisés pour la séparation matière blanche/matière grise en IRM cérébrale. Dufour *et al* [DST⁺05] les utilisent pour le suivi de cellules en microscopie, tandis que Scherl *et al* [SHPL07] les utilisent pour la segmentation de la carotide.

2.1.5 Discussion

Nous pouvons d'ores et déjà juger de la pertinence d'une représentation en fonction des applications visées. En premier lieu, nous séparons les modèles discrets et les ensembles de niveaux des représentation paramétrées. Les modèles discrets et les ensembles de niveaux permettent de représenter des formes de géométrie et de topologie arbitraires. Dans les modèles discrets, la complexité de la forme représentée peut augmenter avec le nombre de sommets. Dans les ensembles de niveaux, cette complexité est fonction de l'appartenance des pixels/voxels à la région R_{in} . A l'inverse, les représentations paramétrées limitent l'espace des formes admissibles. A titre d'exemple, la complexité d'une représentation de Fourier est fonction du nombre d'harmoniques considérées. Si l'on souhaite représenter un contour comportant des zones anguleuses ou étroites se traduisant par des fréquences élevées, beaucoup d'harmoniques seront nécessaires et on perd alors l'intérêt de la représentation. Les modèles paramétrés se justifient lorsque les contraintes de régularité sont fortes et que l'on dispose de connaissances *a priori* sur les objets à segmenter. Ils sont intrinsèquement contraints, tandis que les modèles discrets et les ensembles de niveaux nécessiteront l'ajout de contraintes supplémentaires dans leurs méthodes d'évolution.

Comme nous souhaitons disposer de modèles génériques, nous nous orientons par la suite vers les modèles discrets et les ensembles de niveaux. Par ailleurs, ces modèles ont l'avantage de pouvoir décrire des contours 2D et des surfaces 3D à l'aide du même formalisme. Ceci est d'autant plus vrai pour les ensembles de niveaux, dont la définition est indépendante

de la dimension des données, et qui sont par conséquent généralisables à des problèmes de segmentation n -dimensionnels. Outre leur complexité moindre, les représentations discrètes comme les maillages sont plus intuitives que les ensembles de niveaux. La nature des ensembles de niveaux a des conséquences sur leur évolution, que nous décrivons à la section suivante.

2.2 Evolution

La segmentation proprement dite est réalisée par déformation itérative du modèle, en modifiant les variables de la structure qui représente la surface. De manière générale, l'évolution est réalisée par une approche énergétique. Elle consiste à associer à la surface une fonctionnelle d'énergie E dépendante de la régularité géométrique de la surface et de sa distance aux données à segmenter. L'énergie est une fonction de coût qui doit être minimisée, le processus de segmentation étant formulé en tant que problème d'optimisation. L'énergie comporte généralement des termes internes qui ne dépendent que de la surface (sans considérer l'image, donc) et des termes mettant en relation le modèle avec l'image. Les termes internes maintiennent la régularité géométrique de la surface tandis que les termes externes attirent la surface vers les frontières de l'objet. On pénalise ainsi une surface irrégulière ou mal ajustée aux données. La surface Γ^* qui minimise E est considérée comme la solution finale au problème de segmentation. Dans l'idéal, Γ^* conduit au minimum global de E , cependant la méthode se contente en pratique d'un "bon" minimum local.

La fonctionnelle d'énergie elle-même n'indique pas directement la méthode d'évolution à appliquer. Une équation d'évolution, qui suggère plus ou moins l'algorithme à appliquer aux variables de la surface, est dérivée à partir de l'expression de E . Il faut noter qu'une équation d'évolution peut être donnée sans approche énergétique préalable. Le problème est alors formulé comme la recherche d'un équilibre entre forces internes et externes, notions étroitement liées avec les énergies de même nom. Dans cette section, nous décrivons les différentes méthodes d'évolution appliquées aux surfaces actives.

2.2.1 Approche variationnelle

L'approche variationnelle a été introduite à l'origine pour les contours actifs 2D par Kass *et al.* [KWT88] et étendue par la suite aux surfaces actives par Cohen et Cohen [Coh91; CC93]. A la surface continue Γ définie précédemment, on associe la fonctionnelle

d'énergie suivante :

$$\begin{aligned}
E(\Gamma) = & \iint_{\Omega} \left\{ \omega_{10} \left\| \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial u} \right\|^2 + \omega_{01} \left\| \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial v} \right\|^2 + 2\omega_{11} \left\| \frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial u \partial v} \right\|^2 \right. \\
& \left. + \omega_{20} \left\| \frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial u^2} \right\|^2 + \omega_{02} \left\| \frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial v^2} \right\|^2 + P(\mathbf{s}) \right\} dudv
\end{aligned} \tag{2.27}$$

où ω_{10} et ω_{01} sont les coefficients d'élasticité, ω_{20} et ω_{02} les coefficients de rigidité, et ω_{11} la résistance à la torsion. Introduite initialement dans [Coh91], cette énergie est reprise dans [MT95a] pour d'autres types de représentation. Les dérivées de premier et de second ordre expriment les énergies internes, tandis que $P(\mathbf{s})$ est l'énergie externe. Le problème variationnel consiste à déterminer la surface optimale Γ^* minimisant E .

Cette fonctionnelle d'énergie est généralement non-convexe et possède de nombreux minima locaux. Grâce au théorème fondamental du calcul variationnel, le problème de minimisation est converti en une équation d'Euler-Lagrange, une équation aux dérivées partielles (EDP) stationnaire, à laquelle s'ajoutent des conditions aux limites qui représentent la position initiale de la surface :

$$\begin{cases} -\omega_{10} \frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial u^2} - \omega_{01} \frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial v^2} + 2\omega_{11} \frac{\partial^4 \mathbf{s}}{\partial u^2 \partial v^2} + \omega_{20} \frac{\partial^4 \mathbf{s}}{\partial u^4} + \omega_{02} \frac{\partial^4 \mathbf{s}}{\partial v^4} = -\nabla P(\mathbf{s}) \\ \mathbf{s}(u, v, t = 0) = \mathbf{s}_0(u, v) \text{ (initialisation)} \end{cases} \tag{2.28}$$

où $\mathbf{s}_0(u, v)$ est la position initiale connue. L'équation peut être vue comme un équilibre entre les forces internes (membre de gauche) et externes (membre de droite). Pour être résolue, l'équation est discrétisée par la méthode des différences finies [KWT88; Coh91] ou des éléments finis [CC93; MT95a].

Discrétisation par différences finies

Afin de discrétiser les dérivées partielles par différences finies, l'espace des paramètres Ω est échantillonné selon une grille de taille $M \times N$. L'échantillonnage se fait à intervalle constant, de sorte qu'à chaque nœud (i, j) de la grille est évalué un point de la surface :

$$\mathbf{s}_{i,j} = \mathbf{s} \left(\frac{i}{M}, \frac{j}{N} \right) \tag{2.29}$$

La discrétisation est en connexité 4, de sorte qu'un nœud (i, j) a pour voisinage $\{(i-1, j), (i+1, j), (i, j-1), (i, j+1)\}$. Les dérivées partielles sont approximées par différences finies centrées selon ce voisinage. Dans les équations suivantes, elles sont évaluées au

nœud (i, j) .

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial u} &\approx \frac{\mathbf{s}_{i+1,j} - \mathbf{s}_{i-1,j}}{2\Delta u} \\
\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial v} &\approx \frac{\mathbf{s}_{i,j+1} - \mathbf{s}_{i,j-1}}{2\Delta v} \\
\frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial u^2} &\approx \frac{\mathbf{s}_{i+1,j} - 2\mathbf{s}_{i,j} + \mathbf{s}_{i-1,j}}{4\Delta u^2} \\
\frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial v^2} &\approx \frac{\mathbf{s}_{i,j+1} - 2\mathbf{s}_{i,j} + \mathbf{s}_{i,j-1}}{4\Delta v^2} \\
\frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial u \partial v} &\approx \frac{\mathbf{s}_{i+1,j+1} - \mathbf{s}_{i-1,j+1} - \mathbf{s}_{i+1,j-1} + \mathbf{s}_{i-1,j-1}}{4\Delta u \Delta v}
\end{aligned} \tag{2.30}$$

où Δu et Δv sont les échantillonnages des paramètres u et v . Etant donnée la taille de la grille, on a $\Delta u = M^{-1}$ et $\Delta v = N^{-1}$. En écrivant la version discrète de l'équation 2.28 pour chaque nœud (i, j) , on obtient un système de $M \times N$ équations, que l'on écrit sous forme matricielle :

$$\mathbf{A}\mathbf{S} = \mathbf{F} \tag{2.31}$$

où \mathbf{S} est la matrice $MN \times 3$ des points de surface échantillonnés :

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_{0,0}^T \\ \mathbf{s}_{1,0}^T \\ \vdots \\ \mathbf{s}_{N-1,0}^T \\ \mathbf{s}_{0,1}^T \\ \vdots \\ \mathbf{s}_{N-1,1}^T \\ \vdots \\ \mathbf{s}_{N-1,M-1}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{0,0} & y_{0,0} & z_{0,0} \\ x_{1,0} & y_{1,0} & z_{1,0} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{N-1,0} & y_{N-1,0} & z_{N-1,0} \\ x_{0,1} & y_{0,1} & z_{0,1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{N-1,1} & y_{N-1,1} & z_{N-1,1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{N-1,M-1} & y_{N-1,M-1} & z_{N-1,M-1} \end{bmatrix} \tag{2.32}$$

et \mathbf{A} est la matrice de rigidité, symétrique et définie positive. Ces coefficients sont fonction des paramètres d'élasticité et de rigidité ω_{ij} . Les coefficients de la matrice \mathbf{F} sont les potentiels externes aux nœuds, la taille de \mathbf{F} étant égale à celle de \mathbf{S} . L'équation 2.31 ne peut être résolue de façon directe par inversion de \mathbf{A} , ce qui conduirait à des instabilités numériques dues aux dérivées d'ordre élevé. Afin de résoudre le système matriciel, un terme d'inertie du premier ordre est ajouté :

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} + \mathbf{A}\mathbf{S} = \mathbf{F} \tag{2.33}$$

Ce terme correspond à la dérivée temporelle de la surface, autrement dit, sa vitesse. En rendant le système dépendant du temps, on garantit la convergence et la stabilité numérique par résolution itérative. Cette équation a une interprétation physique précise : elle est vérifiée lorsque la surface atteint un état stable, où les forces internes et externes s'équilibrent. Sous cette condition, la vitesse s'annule et la surface vérifie l'équation 2.31. En

vue d'une résolution itérative, la dérivée temporelle est discrétisée par la méthode d'Euler :

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} \approx \frac{\mathbf{S}^{(t+1)} - \mathbf{S}^{(t)}}{\Delta t} \quad (2.34)$$

où Δt est le pas temporel choisi. Cela conduit au schéma implicite

$$\frac{\mathbf{S}^{(t+1)} - \mathbf{S}^{(t)}}{\Delta t} + \mathbf{A}\mathbf{S}^{(t)} = \mathbf{F} \quad (2.35)$$

Un schéma d'évolution explicite est obtenu par regroupement des termes à l'instant t dans le membre de droite.

$$\mathbf{S}^{(t+1)} = (\mathbf{I} + \Delta t \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{S}^{(t)} + \Delta t \mathbf{F}^{(t)}) \quad (2.36)$$

Contrairement à la matrice de rigidité de l'approche variationnelle des contours actifs 2D [KWT88], \mathbf{A} n'est pas dotée ici d'une structure pentadiagonale. Son inversion ne peut être optimisée comme elle l'est dans la méthode des contours actifs, qui utilise la décomposition LU. Cependant, si l'espace des paramètres n'est pas rediscrétisé, i.e. si la surface ne subit pas de remaillage au cours de sa déformation, la méthode ne nécessite qu'une seule inversion de \mathbf{A} .

Cette méthode présente l'inconvénient d'être limitée au choix initial de la grille. En effet, quelles que soient les déformations subies par la surface, le nombre de noeuds est fixé au départ. La grille de topologie rectangulaire n'est pas adaptée à toutes les topologies de surface. Comme le montre la figure 2.1, elle discrétise très naturellement les plans, les tores et cylindres puisque chaque noeud a un voisinage de connexité 4, excepté les noeuds situés au bord (dans un plan ou un cylindre). La discrétisation par différences finies est plus problématique pour une surface de topologie sphérique, ceci étant dû au voisinage des noeuds situés aux pôles.

Discrétisation par éléments finis

Les méthodes variationnelles par différences finies ou éléments finis demeurent assez calculatoires. L'inversion de la matrice de rigidité \mathbf{A} peut devenir très coûteuse si le nombre de noeuds est important. La discrétisation par éléments finis permet de réduire le nombre de noeuds. On considère l'équation aux dérivées partielles générale :

$$\mathbf{h}(\mathbf{u}) = 0 \quad (2.37)$$

où $\mathbf{u} \in \Omega$ est le vecteur des paramètres et \mathbf{h} est une fonction vectorielle faisant intervenir des dérivées partielles par rapport aux composantes de \mathbf{u} . En analyse fonctionnelle, il est démontré que résoudre l'équation 2.37 revient à résoudre

$$\int_{\Omega} \psi(\mathbf{u}) \mathbf{h}(\mathbf{u}) d\mathbf{u} = 0 \quad \forall \psi(\mathbf{u}) \Leftrightarrow \mathbf{h}(\mathbf{u}) = 0 \quad (2.38)$$

qui est la formulation variationnelle du problème 2.37 (on parle également de formulation intégrale ou formulation faible). ψ est appelée la fonction de pondération. Une fois l'espace des paramètres discrétisé en éléments délimités par des nœuds, la résolution du problème par éléments finis va consister à déterminer \mathbf{h} satisfaisant l'équation 2.37 uniquement pour certaines fonctions ψ et à des nœuds déterminés de Ω , les valeurs situées ailleurs étant interpolées à partir des valeurs aux nœuds. Dans le cas de la minimisation de l'énergie, la formulation variationnelle de l'EDP 2.28 est

$$a(\psi, \mathbf{s}) = L(\psi, \mathbf{s}) \quad (2.39)$$

avec la forme bilinéaire a

$$\begin{aligned} a(\psi, \mathbf{s}) = & \iint_{\Omega} \left\{ \omega_{10} \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial u} + \omega_{01} \frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial v} + \omega_{20} \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} \frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial u^2} \right. \\ & \left. + 2\omega_{11} \frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v} \frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial u \partial v} + \omega_{02} \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial v^2} \right\} dudv \end{aligned} \quad (2.40)$$

et la forme linéaire L

$$L(\psi, \mathbf{s}) = - \iint_{\Omega} \nabla P(\mathbf{s}) \psi dudv \quad (2.41)$$

Le domaine de définition Ω des paramètres (u, v) est décomposé en éléments adjacents, constituant ainsi un maillage. Des éléments rectangulaires [CC93] ou triangulaires [MT93; MT95a] sont généralement choisis. Le maillage comporte N nœuds situés aux extrémités des éléments. L'équation 2.39 est résolue pour une estimation discrète de \mathbf{s} , notée $\hat{\mathbf{s}}$, polynomiale par morceaux et définie comme une somme de fonctions génératrices :

$$\hat{\mathbf{s}}(u, v) = \sum_{i=1}^N \mathcal{N}_i(u, v) \mathbf{q}_i^T(u, v) \quad (2.42)$$

où \mathcal{N}_i est le vecteur des fonctions génératrices associées au nœud i et \mathbf{q}_i est le vecteur des variables nodales associées à ce même nœud (ces variables dépendent du choix de la base de fonctions génératrices et sont explicitées par des exemples). Les fonctions génératrices permettent l'interpolation sur les éléments finis. L'équation 2.39 est réécrite en remplaçant \mathbf{s} par son estimation discrète $\hat{\mathbf{s}}$. Selon le maillage, la base de fonctions génératrices est choisie de façon à ce que la réécriture de 2.39 conduise à un système linéaire pouvant se résoudre facilement.

Cohen et Cohen [CC93] discrétisent l'espace Ω avec des éléments rectangulaires (figure 2.5) et utilisent les fonctions génératrices de Bogner-Fix-Schmidt $\{\phi, \psi, \eta, \zeta\}$, que nous ne détaillerons pas ici. A chaque nœud est associée une instance de ces fonctions :

$$\mathcal{N}_i(u, v) = [\phi_i(u, v), \psi_i(u, v), \eta_i(u, v), \zeta_i(u, v)] \quad (2.43)$$

Le vecteur de variables nodales est alors :

$$\mathbf{q}_i = \left[\hat{\mathbf{s}}(u_i, v_i), \frac{\partial \hat{\mathbf{s}}}{\partial u}(u_i, v_i), \frac{\partial \hat{\mathbf{s}}}{\partial v}(u_i, v_i), \frac{\partial^2 \hat{\mathbf{s}}}{\partial u \partial v}(u_i, v_i) \right] \quad (2.44)$$

où (u_i, v_i) sont les valeurs des paramètres (u, v) au nœud i . Sans détailler les fonctions de Bogner-Fox-Schmidt, on retiendra notamment qu'elles sont conçues pour que leurs dérivées partielles en u et v s'annulent à des valeurs et à des ordres précis, de façon à conduire à un système linéaire relativement creux. Comme avec les différences finies, les éléments finis rectangulaires sont adaptés à la discrétisation de surfaces de topologie planaire, cylindrique ou torique. Ils ne conviennent pas pour des surfaces sphériques, qui présentent des difficultés de maillage aux pôles.

Pour discrétiser une surface de topologie sphérique, McInerney et Terzopoulos [MT93; MT95a] utilisent des éléments triangulaires. Dans ce cas-là, le vecteur des variables nodales est :

$$\mathbf{q}_i = \left[\frac{\partial \hat{\mathbf{s}}}{\partial u}(u_i, v_i), \frac{\partial \hat{\mathbf{s}}}{\partial v}(u_i, v_i), \frac{\partial^2 \hat{\mathbf{s}}}{\partial u \partial v}(u_i, v_i), \frac{\partial^2 \hat{\mathbf{s}}}{\partial u^2}(u_i, v_i), \frac{\partial^2 \hat{\mathbf{s}}}{\partial v^2}(u_i, v_i) \right] \quad (2.45)$$

Les fonctions génératrices permettent l'interpolation sur un élément triangulaire et sont détaillées dans [MT95a].

Quelle que soit la base de fonctions utilisée, le problème est finalement ramené à un système linéaire, dans lequel la matrice des variables nodales \mathbf{Q} doit être déterminée telle que

$$\mathbf{A}\mathbf{Q} = \mathbf{F} \quad (2.46)$$

où \mathbf{Q} rassemble les vecteurs de variables nodales : $\mathbf{Q} = [\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_n]$. Dans le même esprit que la méthode par différences finies, \mathbf{A} et \mathbf{F} sont les matrices de rigidité et de force externe. La matrice de rigidité \mathbf{A} est de taille $MN \times MN$, où M est la dimension des vecteurs de variables nodales \mathbf{q} . Un schéma d'évolution explicite est obtenu par ajout d'un terme d'inertie sur \mathbf{Q} et intégration d'Euler :

$$\mathbf{Q}^{(t+1)} = (\mathbf{I} + \Delta t \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{Q}^{(t)} + \Delta t \mathbf{F}^{(t)}) \quad (2.47)$$

La complexité du problème est multipliée par M^2 par rapport à celle des différences finies. Cependant, la discrétisation par éléments finis nécessite un nombre de nœuds moins important, c'est pourquoi les travaux portant sur cette approche font généralement état de coûts calculatoires équivalents.

2.2.2 Approche gloutonne

Le principe général d'une méthode de minimisation gloutonne est de tenter d'atteindre le minimum global d'une fonction de coût par une suite de minimisations locales. Prenons l'exemple de la recherche du plus court chemin dans un graphe [GM79]. A un nœud donné du graphe j , l'algorithme glouton effectue une minimisation locale en choisissant systématiquement d'avancer au nœud adjacent qui est relié à j par l'arc de longueur minimum. De cette manière, la solution optimale n'est pas rigoureusement garantie. En seg-

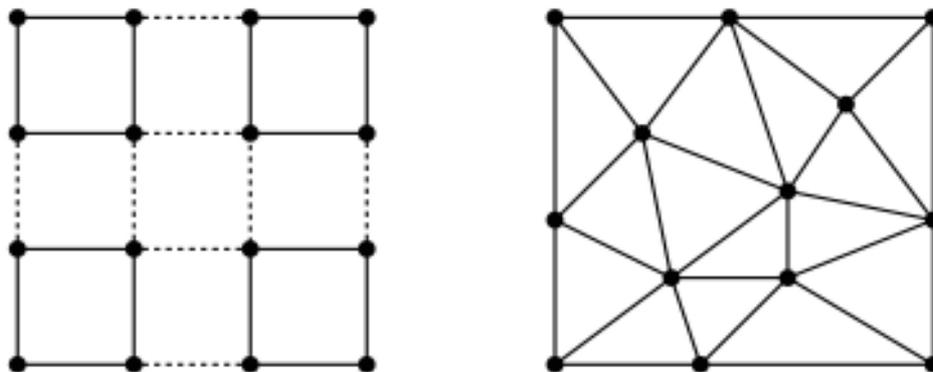


FIG. 2.5 – Maillage de l'espace des paramètres pour la méthodes des éléments finis : rectangulaire (gauche) et triangulaire (droite)

mentation d'image, les méthodes ne déterminent généralement pas une solution optimale, mais un minimum local satisfaisant.

Dans le cadre de l'évolution des modèles déformables, l'algorithme glouton permet de modifier les variables de la structure indépendamment les unes des autres par pas réduits. Les représentations discrètes comme les contours polygonaux 2D ou les maillages 3D sont des représentations adéquates pour cet algorithme, car les coordonnées des sommets \mathbf{p}_i peuvent être modifiées localement. L'approche gloutonne a été initialement appliquée aux contours actifs 2D par Williams et Shah [WS92], comme alternative plus rapide et plus simple à l'approche par calcul variationnel [KWT88] ou la programmation dynamique [AWR90; GGLV95].

L'approche gloutonne est par nature discrète. Pour permettre une suite de minimisations locales, nous partons du principe que l'énergie du modèle Γ peut être exprimée comme une somme d'énergies de sommet :

$$E(\Gamma) = \sum_{i=1}^n E(\mathbf{p}_i) \quad (2.48)$$

Nous présentons l'approche sans détailler l'énergie des sommets $E(\mathbf{p}_i)$, car il n'y a *a priori* pas de restriction quant à son expression. On admettra que l'énergie d'un sommet est une somme pondérée de K énergies :

$$E(\mathbf{p}_i) = \sum_{k=1}^K \omega_k E_k(\mathbf{p}_i) \quad (2.49)$$

où les coefficients ω_k sont les poids affectés aux termes E_k . Les énergies associées au sommet \mathbf{p}_i sont fonction de ses coordonnées et d'un voisinage réduit. Dans le cas le plus simple, seul le voisinage de premier ordre V_i intervient dans la formulation des énergies de \mathbf{p}_i .

Afin de minimiser l'énergie totale E , des optimisations locales sont effectuées successivement. Plus précisément, l'énergie de chaque sommet est minimisée indépendamment de celles des autres. A chaque itération de l'algorithme, une fenêtre entourant chaque sommet est considérée, comme le montre la figure 2.6. Dans la plupart des articles ayant trait aux contours actifs 2D, cette fenêtre est plutôt désignée sous le nom de "voisinage". Cependant, le terme fenêtre sera conservé par la suite pour éviter la confusion avec le voisinage topologique V_i du sommet, i.e. l'ensemble des sommets connectés. La fenêtre d'un point $\mathbf{x} = (x, y)^T$, notée $W(\mathbf{x})$, est l'ensemble des points dont la distance à \mathbf{x} est inférieure à un seuil, qui dépend de la largeur de la fenêtre. En choisissant comme distance la norme infinie $\|\cdot\|_\infty$,

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max(x, y) \quad (2.50)$$

on obtient une fenêtre carrée (figure 2.6). Dans chaque direction, l'écart entre \mathbf{x} et les points contenus dans la fenêtre est un entier, car le pas de la fenêtre est généralement identique à celui des pixels de l'image. De plus, la fenêtre comprend le voxel \mathbf{x} lui-même. Une fenêtre carrée de largeur w est définie comme suit :

$$W(\mathbf{x}) = \{\mathbf{x} + \mathbf{r} \mid \mathbf{r} \in \llbracket -\lfloor w/2 \rfloor, \lfloor w/2 \rfloor \rrbracket^2\} \quad (2.51)$$

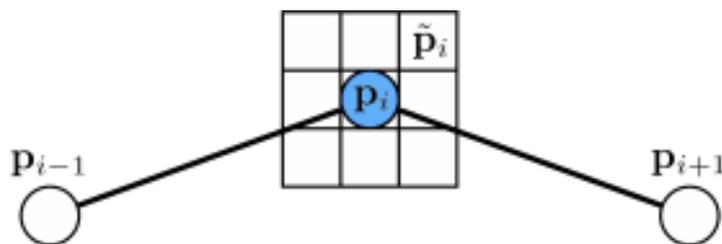


FIG. 2.6 – Fenêtre carrée 3×3 autour du sommet \mathbf{p}_i

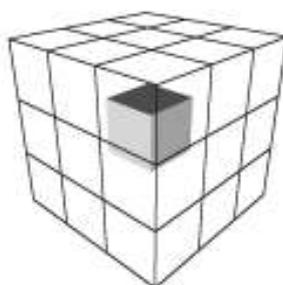


FIG. 2.7 – Fenêtre cubique $3 \times 3 \times 3$ (avec voxel central)

Pour faire évoluer un sommet \mathbf{p}_i , l'énergie de ce sommet est calculée à chaque position $\tilde{\mathbf{p}}_i$ appartenant à la fenêtre. Le sommet est ensuite déplacé à la position qui donne l'énergie minimale. Ceci peut être résumé par le schéma d'évolution suivant :

$$\mathbf{p}_i^{(t+1)} = \underset{\tilde{\mathbf{p}}_i \in W(\mathbf{p}_i)}{\operatorname{argmin}} E(\tilde{\mathbf{p}}_i^{(t)}) \quad (2.52)$$

L'énergie d'un sommet fait obligatoirement intervenir ses coordonnées. Le terme $E(\tilde{\mathbf{p}}_i)$ désigne en fait l'énergie qu'aurait le sommet \mathbf{p}_i s'il se trouvait à la position $\tilde{\mathbf{p}}_i$. Avant de déterminer le minimum pour un sommet donné, chaque énergie est normalisée localement :

$$E_k(\tilde{\mathbf{p}}_i) \leftarrow \frac{E_k(\mathbf{p}'_i) - \min_{\tilde{\mathbf{p}}_j \in W(\mathbf{p}_i)} E_k(\tilde{\mathbf{p}}_j)}{\max_{\tilde{\mathbf{p}}_j \in W(\mathbf{p}_i)} E_k(\tilde{\mathbf{p}}_j) - \min_{\tilde{\mathbf{p}}_j \in W(\mathbf{p}_i)} E_k(\tilde{\mathbf{p}}_j)} \quad \forall k, 1 \leq k \leq K \quad (2.53)$$

Dans le cas tridimensionnel, l'espace de recherche local le plus naturel est une fenêtre cubique. La figure 2.7 illustre une fenêtre de taille $3 \times 3 \times 3$ avec son voxel central. Une extension 3D de l'algorithme glouton appliquée sur un maillage discret a été proposée dans [BE96] et [ZB97]. Tohka [Toh03; TM04] réalise une hybridation de la méthode gloutonne et d'un algorithme génétique pour la segmentation à l'aide de maillages simples.

De nombreuses améliorations ont été apportées à l'algorithme glouton, toutes étant basées sur l'optimisation de la fenêtre. Le but est de réduire l'espace de recherche, en calculant l'énergie à des endroits sélectionnés. Dans [LY94], une accélération de l'ordre de 30% est obtenue par l'utilisation de fenêtres dont les directions sont alternées, une avec les voisins cardinaux et une avec les voisins diagonaux (figure 2.8b). L'amélioration de [SLY06] offre des gains de vitesse de 21 à 40% par rapport à l'approche précédente, en utilisant des pas différents (figure 2.8c).

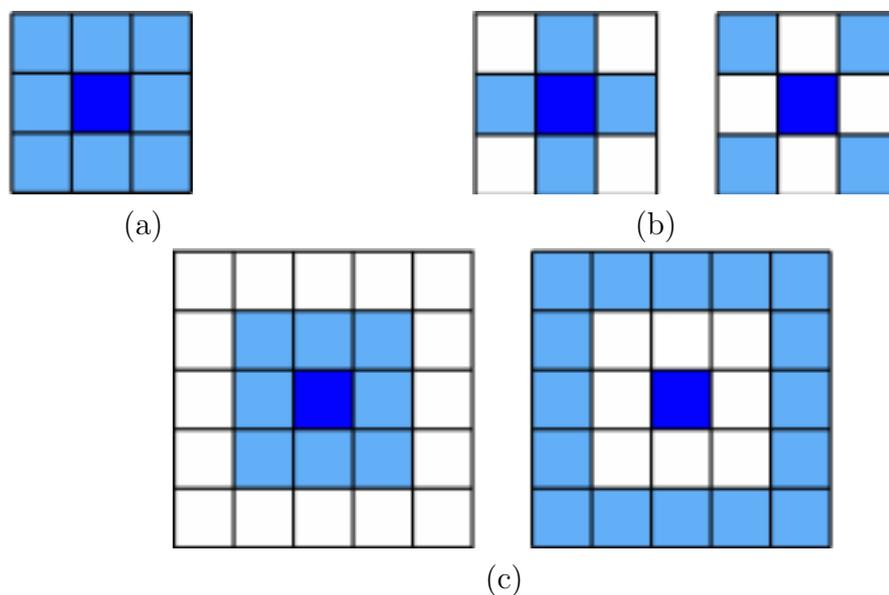


FIG. 2.8 – Fenêtres des algorithmes gloutons. (a) Fenêtre carrée de base (b) Fenêtres alternées de l'approche de Lam et Yan (c) Fenêtres alternées de l'approche de Sakalli *et al*

2.2.3 Approche physique

L'approche physique est basée sur des principes fréquemment rencontrés en mécanique. A l'inverse des approches précédemment décrites, la méthode physique ne part pas d'une fonctionnelle d'énergie à minimiser pour en dériver une équation d'évolution. Elle n'utilise pas les outils de calcul variationnel ou de descente de gradient, dans la mesure où l'équation d'évolution est le point de départ de la modélisation. Cette équation utilise les bases de la dynamique lagrangienne qui décrit la loi de mouvement auquel obéit une masse reliée à un ressort. Considérons la surface continue Γ . Chaque point $\mathbf{s}(u, v)$ est soumis à une dynamique lagrangienne :

$$m(u, v) \frac{\partial^2 \mathbf{s}(u, v)}{\partial t^2} + \gamma(u, v) \frac{\partial \mathbf{s}(u, v)}{\partial t} = \mathbf{f}_{interne}(u, v) + \mathbf{f}_{externe}(u, v) \quad (2.54)$$

où $m(u, v)$ est la masse du point $\mathbf{s}(u, v)$ et $\gamma(u, v)$ sa viscosité. L'équation précédente introduit des termes inertiels du premier et du second ordre, dotant ainsi la surface Γ d'une accélération et d'une vitesse. Le modèle général exprime la masse et la viscosité comme des fonctions de u et v . Ainsi, chaque point de la surface peut avoir des propriétés mécaniques propres.

La structure des maillages discrets se prête à une évolution physique, car les sommets peuvent s'apparenter à des masses connectées entre elles par des ressorts. Le maillage se comporte alors comme un système dynamique masse-ressort discret [VT92]. Chaque sommet \mathbf{p}_i est considéré comme un corps indépendant soumis à une dynamique Lagrangienne :

$$m_i \frac{\partial^2 \mathbf{p}_i}{\partial t^2} + \gamma_i \frac{\partial \mathbf{p}_i}{\partial t} = \mathbf{f}_{interne}(\mathbf{p}_i) + \mathbf{f}_{externe}(\mathbf{p}_i) \quad (2.55)$$

où m_i et γ_i sont la masse et la viscosité du sommet \mathbf{p}_i . En mécanique, cette équation de mouvement est résolue en appliquant un schéma explicite d'Euler. On introduit tout d'abord l'accélération \mathbf{a}_i et la vitesse \mathbf{v}_i du sommet \mathbf{p}_i :

$$\mathbf{a}_i = \frac{\partial^2 \mathbf{p}_i}{\partial t^2} \quad \mathbf{v}_i = \frac{\partial \mathbf{p}_i}{\partial t} \quad (2.56)$$

En discrétisant ces termes inertiels grâce à la méthode d'Euler avec un pas temporel Δt , le schéma explicite d'évolution est ainsi obtenu :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_i^{(t+1)} &= \frac{\Delta t}{m_i} (-\gamma_i \mathbf{v}_i^{(t)} + \mathbf{f}_{interne}(\mathbf{p}_i) + \mathbf{f}_{externe}(\mathbf{p}_i)) \\ \mathbf{v}_i^{(t+1)} &= \mathbf{v}_i^{(t)} + \Delta t \mathbf{a}_i^{(t)} \\ \mathbf{p}_i^{(t+1)} &= \mathbf{p}_i^{(t)} + \Delta t \mathbf{v}_i^{(t)} \end{aligned} \quad (2.57)$$

A chaque itération, le sommet \mathbf{p}_i est translaté le long de son vecteur vitesse. Celui-ci est modifié par son accélération, elle-même dépendante des forces internes et externes qui

s'appliquent localement sur le sommet \mathbf{p}_i . D'autres schémas de discrétisation que celui d'Euler peuvent être également utilisés. A titre d'exemple, la méthode de Runge-Kutta est employée dans [Lac98] pour la discrétisation temporelle. Elle offre une meilleure stabilité pour un coût calculatoire légèrement supérieur.

La surface Γ atteint un état stable lorsque tous les sommets sont statiques. La condition suivante est alors vérifiée à l'instant final T :

$$\left\| \mathbf{v}_i^{(T)} \right\| = \left\| \mathbf{p}_i^{(T)} - \mathbf{p}_i^{(T-1)} \right\| = 0, \quad \forall i, 1 \leq i \leq n \quad (2.58)$$

Des schémas similaires sont appliqués sur un maillage triangulaire dans [BMS97], [CM95] et [HG93]. Par ailleurs, l'évolution physique est appliquée sur les maillages simplex dans [Del99]. Le paramètre de viscosité est considéré égal pour tous les sommets ($\gamma_i = \gamma$) et la masse m_i est unitaire. Des poids $\omega_{interne}$ et $\omega_{externe}$ sont ajoutés, afin de pouvoir ajuster l'importance des forces interne et externe. Le pas temporel Δt est en quelque sorte inclus dans les coefficients $\omega_{interne}$, $\omega_{externe}$ et γ . Le schéma d'évolution est

$$\mathbf{p}_i^{(t+1)} = \mathbf{p}_i^{(t)} + (1 - \gamma)(\mathbf{p}_i^{(t)} - \mathbf{p}_i^{(t-1)}) + \omega_{interne} \mathbf{f}_{interne}(\mathbf{p}_i^{(t)}) + \omega_{externe} \mathbf{f}_{externe}(\mathbf{p}_i^{(t)}) \quad (2.59)$$

La méthode physique est la voie privilégiée pour la déformation des maillages discrets 3D. Dans une moindre mesure, elle a également été appliquée sur les contours actifs 2D [LV95]. Elle peut également être appliquée aux implémentations B-spline [WT05; CT05]. Avec cette représentation, les forces sont appliquées non pas sur les sommets mais sur les points de contrôle des splines cubiques.

2.2.4 Gradient de l'énergie

Descente de gradient

La méthode classique de descente de gradient s'applique naturellement lorsque l'on souhaite minimiser une énergie E dépendant d'un ensemble fini de N variables $x_j, 1 \leq j \leq N$. Si l'on note le vecteur des variables $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_N]^T$, le schéma général d'évolution par descente de gradient s'écrit :

$$\mathbf{x}^{(t+1)} = \mathbf{x}^{(t)} - \alpha \nabla E^{(t)} \quad (2.60)$$

où ∇E est le gradient de l'énergie par rapport aux variables :

$$\nabla E = \frac{\partial E}{\partial \mathbf{x}} = \left[\frac{\partial E}{\partial x_1}, \frac{\partial E}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial E}{\partial x_N} \right]^T \quad (2.61)$$

et α est un vecteur de pas $[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N]^T$ qui contrôle la vitesse de convergence de chaque variable. A un instant t , ∇E est le vecteur indiquant la direction de la pente suivie par la fonction d'énergie. En modifiant les variables pour se déplacer dans la direction opposée,

la quantité E est minimisée localement. Un critère d'arrêt usuel consiste à définir un seuil sur la norme $\|\nabla E\|$, en dessous duquel on considère que l'énergie ne varie plus.

L'algorithme nécessite de déterminer les expressions analytiques de la dérivée partielle de E par rapport à chaque variable. La méthode est d'autant plus simple qu'une dérivée partielle ($\partial E/\partial x_j$) fait intervenir peu de variables autres que x_j . C'est notamment le cas pour les modèles déformables discrets. Sur un contour polygonal ou un maillage, les variables sont les sommets \mathbf{p}_i . Le schéma obtenu par descente de gradient

$$\mathbf{p}_i^{(t+1)} = \mathbf{p}_i^{(t)} - \alpha_i \frac{\partial E}{\partial \mathbf{p}_i} \quad (2.62)$$

s'apparente à une approche physique simplifiée. En effet, $(\partial E/\partial \mathbf{p}_i)$ ne dépend que de \mathbf{p}_i et de son voisinage.

Méthode du gradient conjugué

Les méthodes de gradient conjugué sont des améliorations de la descente de gradient simple, qui convergent de manière optimale pour des fonctions de coût quadratiques. On considère le système quadratique $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B}$ où \mathbf{A} est une matrice symétrique définie positive. Deux vecteurs \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_2 sont dits \mathbf{A} -conjugués s'ils vérifient

$$\mathbf{v}_1^T \mathbf{A} \mathbf{v}_2 = 0 \quad (2.63)$$

Le but de la méthode est de déterminer \mathbf{x} en construisant une suite de directions $\mathbf{d}^{(t)} = \mathbf{x}^{(t+1)} - \mathbf{x}^{(t)}$ qui sont \mathbf{A} -conjugués. En effet, toute méthode de descente qui utilise des directions conjuguées est convergente au sens quadratique. La propriété importante des directions conjuguées est que la minimisation de la fonction de coût dans une direction ne perturbe pas la minimisation dans une autre direction.

La fonctionnelle à minimiser ici n'est pas quadratique. On distingue plusieurs variantes de la méthode du gradient conjugué pour les fonctions de coût quelconques, comme la méthode de Fletcher-Reeves [Fle87] ou celle de Powell [Pow71]. Les grandes lignes de ces méthodes peuvent se décrire ainsi : à l'itération t , la direction $\mathbf{d}^{(t)}$ suivie par \mathbf{x} est la plus orthogonale possible aux directions précédentes.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(t+1)} &= \mathbf{x}^{(t)} + \alpha \mathbf{d}^{(t)} \\ \mathbf{d}^{(t)} &= -\nabla E^{(t)} + \frac{\|\nabla E^{(t)}\|^2}{\|\nabla E^{(t-1)}\|^2} \mathbf{d}^{(t-1)} \end{aligned} \quad (2.64)$$

La première direction suivie est donnée par le gradient : $\mathbf{d}^{(0)} = -\nabla E^{(0)}$. Cette méthode fournit généralement une meilleure convergence que la descente de gradient. Elle réduit également le phénomène d'oscillation autour de la solution finale.

Kaus *et al.* [KVBW⁺04] utilisent la technique du gradient conjugué pour minimiser l'énergie associée à un maillage triangulaire. Cette énergie est une fonctionnelle discrète similaire à celle définie dans l'approche gloutonne (équation 2.48). Chakraborty *et al* [CSD96] l'utilisent sur un contour actif 2D implémenté avec une représentation de Fourier.

2.2.5 Modèles de forme active et d'apparence active

Bien qu'il soit généralement présenté comme un modèle à part entière, le modèle de forme active (*Active Shape Model*, ASM) développé par Cootes et Taylor [CCTG95] peut être considéré comme une méthode d'évolution appliquée à des modèles discrets, comme les courbes polygonales ou les maillages. Cette approche introduit la notion de contrainte de forme, qui va gouverner la géométrie du modèle. La différence principale avec les évolutions non-contraintes décrites précédemment est que le contour ne se déforme que selon des exemples provenant d'une base d'apprentissage. Les ASM se trouvent à mi-chemin entre les contours actifs et le recalage rigide, dans la mesure où leur déformation est plus contrainte que celle d'un contour actif, en autorisant toutefois des disparités par rapport aux formes de référence. Le contour final est plus ou moins conforme aux exemples se trouvant dans la base d'apprentissage.

Nous décrivons ici le modèle de forme active 2D, la méthode d'évolution étant appliquée sur une courbe polygonale $[\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n]$. Nous disposons d'une base d'apprentissage, constituée de m formes \mathbf{a}_l , $1 \leq l \leq m$. Chaque forme \mathbf{a}_l est un vecteur de coordonnées de n points de repère (*landmark points*) :

$$\mathbf{a}_l = [a_{x_{l,1}}, a_{y_{l,1}}, a_{x_{l,2}}, a_{y_{l,2}}, \dots, a_{x_{l,n}}, a_{y_{l,n}}] \quad (2.65)$$

Ces formes sont alignées en terme de paramètres de pose (translation, rotation et mise à l'échelle). Le modèle de forme active est basé sur le modèle à distribution de points (*point distribution model*, PDM), qui appréhende les variations des coordonnées des points de repère dans la base d'apprentissage. Chaque exemple \mathbf{a}_l de la base d'apprentissage correspond à un unique point dans un espace de dimension $2n$. Le nuage de points, composé de l'ensemble de la base d'apprentissage dans cet espace, définit le domaine des formes admissibles, auquel devra appartenir le contour estimé $[\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n]$. La forme moyenne $\bar{\mathbf{a}}$ de la base d'apprentissage est

$$\bar{\mathbf{a}} = \frac{1}{m} \sum_{l=1}^m \mathbf{a}_l \quad (2.66)$$

On calcule ensuite la matrice de covariance des points de repère, de taille $2n \times 2n$:

$$\Sigma = \frac{1}{m} \sum_{l=1}^m (\mathbf{a}_l - \bar{\mathbf{a}})(\mathbf{a}_l - \bar{\mathbf{a}})^T \quad (2.67)$$

Une Analyse en Composantes Principales (ACP) détermine les K premiers modes propres du nuage d'apprentissage : les valeurs propres λ_k et leurs vecteurs propres associés \mathbf{v}_k , $1 \leq$

$k \leq K$. L'ensemble des formes admissibles est donné par :

$$\mathbf{p} = \bar{\mathbf{a}} + \mathbf{V}\mathbf{b} \quad (2.68)$$

où \mathbf{V} est la matrice $2n \times K$ des K premiers vecteurs propres. $\mathbf{b} = [b_1, b_2, \dots, b_K]$ est un vecteur de pondération de dimension K . Ses composantes sont bornées autour de zéro, ce qui traduit la similarité par rapport à la forme moyenne $\bar{\mathbf{a}}$. Pour cela, le choix préconisé par Cootes et Taylor [CET01] est $|b_k| \leq 3\sqrt{\lambda_k}$. L'équation 2.68 permet de générer des formes \mathbf{a} en faisant varier les poids b_k . Lorsque les poids sont bornés, la forme reste dans les limites du domaine des formes admissibles.

Les modèles d'apparence active (*Active Appearance Model*, AAM) [CET01] sont une extension des modèles de forme active. On part ici du principe que l'apparence d'un objet peut être définie par sa forme et sa texture. Comme précédemment, la forme \mathbf{a} est modélisée par un ensemble de points de repère. La texture est quant à elle représentée par les intensités \mathbf{g} des points de repère. Une forme vérifie alors la relation suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \bar{\mathbf{a}} + \mathbf{V}\mathbf{b} \\ \mathbf{g} &= \bar{\mathbf{g}} + \mathbf{V}_g\mathbf{b}_g \end{aligned} \quad (2.69)$$

L'ajustement d'un AAM à une image est effectué par minimisation de l'erreur quadratique moyenne entre les intensités des pixels de l'image et celles des points de repère. Les deux algorithmes testés dans [CET01] sont une descente de gradient et une méthode de Levenberg-Marquardt. Comme les ASM, les AAM sont destinés à l'ajustement plutôt qu'à une détection précise des bords de l'objet. De façon générale, les modèles de forme active sont dédiés à une application précise, car l'ensemble des formes représentables y est volontairement réduit, de par l'adjonction de formes d'apprentissage dans l'évolution.

2.2.6 Evolution des modèles implicites

Equation d'évolution

En se basant sur la théorie de l'évolution des fronts dépendants de la courbure [Set85; Set89], nous considérons un contour paramétrique Γ dont le vecteur position \mathbf{c} est fonction du paramètre spatial u et du temps t . Son équation d'évolution est

$$\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} = F_T(u, t)\mathbf{t}(u, t) + F_N(u, t)\mathbf{n}(u, t) \quad (2.70)$$

où $\mathbf{t}(u, t)$ et $\mathbf{n}(u, t)$ sont deux vecteurs unitaires, respectivement la tangente et la normale intérieure au point $\mathbf{c}(u)$ à l'instant t . Le déplacement appliqué à chaque point $\mathbf{c}(u, t)$ est exprimé dans le repère de Frenet (\mathbf{t}, \mathbf{n}) , séparé en une composante tangentielle de vitesse $F_T(u, t)$ et une composante normale de vitesse $F_N(u, t)$. Il est énoncé dans [Sap01] que seule

la composante normale affecte la géométrie du contour, la composante tangentielle n'ayant d'incidence que sur sa paramétrisation. La déformation du contour Γ a lieu uniquement dans sa direction normale. On se ramène donc à l'équation d'évolution

$$\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} = F(u, t) \mathbf{n}(u, t) \quad (2.71)$$

Considérant maintenant que Γ est implémenté par une fonction d'ensembles de niveaux ψ , on doit déterminer l'équation d'évolution de ψ correspondant à 2.71. En dérivant l'équation suivante par rapport à u ,

$$\psi(\mathbf{c}(u, t), t) = 0, \quad (2.72)$$

on obtient

$$\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial u}(u, t) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{c}(u, t), t) = 0 \quad (2.73)$$

ce qui indique que la tangente de Γ , donnée par $\partial \mathbf{c} / \partial u$, est orthogonale au gradient de la fonction d'ensembles de niveaux $\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{x}} = \nabla \psi$. Par conséquent, le gradient $\nabla \psi$ et la normale $\mathbf{n}(u)$ sont colinéaires. Par convention, on écrit

$$\mathbf{n}(u, t) = - \frac{\nabla \psi}{\|\nabla \psi\|} \quad (2.74)$$

Si maintenant on dérive l'équation 2.72 par rapport à t , on obtient

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}(\mathbf{c}(u, t), t) + \nabla \psi(\mathbf{c}(u, t), t) \cdot \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t}(u, t) = 0 \quad (2.75)$$

En injectant 2.71 et 2.74 dans l'équation précédente, on obtient

$$\frac{\partial \psi(\mathbf{c}(u, t), t)}{\partial t} = F(u, t) \|\nabla \psi(\mathbf{c}(u, t), t)\| \quad (2.76)$$

Cette équation n'est vérifiée que pour les points situés sur le front, c'est-à-dire sur le niveau 0 de ψ . En l'étendant à tous les points \mathbf{x} de \mathcal{D} , on obtient l'équation d'évolution générale d'un modèle implicite :

$$\frac{\partial \psi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = F(\mathbf{x}, t) \|\nabla \psi(\mathbf{x}, t)\| \quad (2.77)$$

La plupart du temps, la vitesse F fait intervenir entre autres un terme externe, de type contour ou région, et un terme de courbure. Quelle que soit la dimension considérée, la courbure d'une surface implémentée de manière implicite est la divergence du gradient normalisé de ψ [OS88].

$$\kappa(\mathbf{x}) = \operatorname{div} \left(\frac{\nabla \psi(\mathbf{x})}{\|\nabla \psi(\mathbf{x})\|} \right) \quad (2.78)$$

Dans ce qui suit, par souci de concision, les dérivées partielles de ψ sont notées en indices :

$$\psi_x = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \psi_{xx} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \dots \quad (2.79)$$

Sur un contour implicite 2D, la courbure s'écrit :

$$\kappa = \frac{\psi_{xx}\psi_y^2 - 2\psi_x\psi_y\psi_{xy} + \psi_x^2\psi_{yy}}{(\psi_x^2 + \psi_y^2)^{3/2}} \quad (2.80)$$

Pour une surface implicite 3D, la courbure moyenne est :

$$\kappa = \frac{\psi_{xx}(\psi_y^2 + \psi_z^2) + \psi_{yy}(\psi_x^2 + \psi_z^2) + \psi_{zz}(\psi_x^2 + \psi_y^2) - 2\psi_{xy}\psi_x\psi_y - 2\psi_{xz}\psi_x\psi_z - 2\psi_{yz}\psi_y\psi_z}{(\psi_x^2 + \psi_y^2 + \psi_z^2)^{3/2}} \quad (2.81)$$

Pour permettre l'évolution numérique, la fonction d'ensembles de niveaux est discrétisée sur une grille de même taille que celle de l'image. Un schéma discret explicite doit être obtenu à partir de l'équation 2.77. Pour cela, la dérivée temporelle est discrétisée par la méthode d'Euler, avec un pas temporel Δt . En chaque point (i, j, k) de la grille, l'équation d'évolution explicite discrète est :

$$\psi_{i,j,k}^{(t+1)} = \psi_{i,j,k}^{(t)} + \Delta t F_{i,j,k}^{(t)} \left\| \nabla \psi_{i,j,k}^{(t)} \right\| \quad (2.82)$$

La complexité de cette méthode est directement fonction de la taille de l'image, ce qui rend la méthode coûteuse en temps de calcul si l'équation d'évolution est implémentée telle quelle. Par ailleurs, la courbure implicite est particulièrement coûteuse en 3D. Il existe cependant diverses méthodes d'accélération, que nous détaillons ci-dessous.

Méthode de la bande étroite

Afin d'accélérer l'évolution des ensembles de niveaux, l'idée principale de la méthode de la bande étroite consiste à ne traiter que les points qui sont proches du niveau zéro de la fonction ψ . Cette méthode a été initialement proposée dans [Cho93] puis optimisée dans [AS95]. Elle se base sur le principe que l'évolution des valeurs $\psi(\mathbf{x})$ n'affecte pas l'évolution de la surface lorsque \mathbf{x} est situé loin du niveau zéro de ψ .

Une fois la surface initialisée, la bande est calculée en déterminant tous les points qui sont séparés du niveau zéro par une distance inférieure à un seuil s (le choix de s est donc critique pour les performances de la méthode). La bande contient aussi bien des points extérieurs qu'intérieurs, de façon à ce que la surface puisse se dilater ou au contraire se rétracter. L'équation d'évolution 2.82 est ensuite appliquée itérativement sur tous les points appartenant à la bande. Au cours de l'évolution, l'ensemble de niveau zéro est amené à dépasser les bords de la bande. Il est donc nécessaire de pouvoir détecter ce cas lorsqu'il se présente et de mettre à jour la bande en conséquence. Par ailleurs, il convient de ré-initialiser périodiquement la fonction ψ sur l'ensemble de l'image, de façon à ce qu'elle s'apparente toujours à la distance signée par rapport à la surface.

Méthode Fast Marching

La méthode *Fast Marching*, développée par Sethian [Set96], s'applique dans le cas particulier où la surface évolue de façon monotone : la vitesse d'évolution F est soit toujours positive (auquel cas le mouvement de la surface est uniquement une dilatation) soit toujours négative (la surface se rétracte en tout point).

L'algorithme effectue une construction efficace de la carte de distance par rapport au front. Cette construction consiste à étiqueter progressivement les points de la grille en fonction de leur distance par rapport à Γ et à les répartir en trois catégories :

- les points pour lesquels la distance à Γ a été calculée (catégorie 1).
- les points voisins d'au moins un point de la catégorie 1 (catégorie 2).
- les autres (catégorie 3).

A chaque itération, le premier point de la liste de catégorie 2 est placé dans la catégorie 1. Ses voisins sont placés dans la catégorie 2 et leur étiquette est mise à jour.

Algorithme HERMES

L'algorithme HERMES, introduit par Paragios et Deriche dans [PD00], est une combinaison du *Fast Marching* et de l'approche par bande étroite. Dans cette dernière, les auteurs remarquent que le traitement des points dont la vitesse est quasiment nulle influence peu la déformation du front et conduit donc à des calculs inutiles. Seuls les points dont la vitesse est élevée font évoluer la surface de manière significative.

L'idée principale est la suivante : à chaque itération, l'algorithme sélectionne le point \mathbf{x} dont la vitesse $F(\mathbf{x})$ est maximale, en valeur absolue. Une fenêtre circulaire, de rayon fixe, est considérée autour de \mathbf{x} . La fonction d'ensembles de niveaux est mise à jour aux points contenus dans cette fenêtre, selon l'équation 2.82. Le front est mis à jour uniquement dans la fenêtre. L'optimisation majeure réside dans le fait que la vitesse d'un point \mathbf{x} n'est recalculée à l'itération t que s'il appartient au front aux itérations t et $t - 1$.

Méthode de Shi et Karl

La méthode d'accélération proposée par Shi et Karl [SK05a; SK05b] est basée sur une restriction des valeurs possibles de la fonction d'ensembles de niveaux. Les approches précédemment décrites maintiennent plus ou moins lisse la fonction ψ , comme la distance signée par rapport au front. Les niveaux de ψ varient lentement dans l'espace et le temps, par application de l'EDP d'évolution 2.82. Cette équation fait intervenir un pas temporel

Δt généralement inférieur à 1 qui pondère la vitesse d'évolution de ψ , les voxels passant progressivement d'un état à l'autre (à l'extérieur ou à l'intérieur de la région). Shi et Karl énoncent que cette modification progressive des valeurs de ψ n'est pas nécessaire pour la segmentation. Au lieu d'être calculée à partir d'une distance, variant de manière continue dans \mathbb{R} , la fonction d'ensembles de niveaux ne peut prendre que quatre valeurs, qui indiquent le statut du point \mathbf{x} :

$$\psi(\mathbf{x}) = \begin{cases} -1 & \text{si } \mathbf{x} \in L_{out} \\ 1 & \text{si } \mathbf{x} \in L_{in} \\ -3 & \text{si } \mathbf{x} \in R_{out} \text{ et } \mathbf{x} \notin L_{out} \\ 3 & \text{si } \mathbf{x} \in R_{in} \text{ et } \mathbf{x} \notin L_{in} \end{cases} \quad (2.83)$$

où L_{in} et L_{out} sont les ensembles de voxels appartenant au front, respectivement à l'intérieur et à l'extérieur de la région. Ces ensembles constituent en fait une bande étroite d'épaisseur unitaire. A chaque itération, la vitesse F n'est calculée que pour les voxels contenus dans L_{out} et L_{in} . Les points de L_{out} passent dans L_{in} si leur vitesse F est positive, tandis que les points de L_{in} passent dans L_{out} si F est négative. Leur valeur est assignée à 1 ou -1 selon le cas. La région est ensuite mise à jour, de façon à ce qu'un point de L_{in} en soit enlevé s'il n'a aucun voisin dans L_{out} , et inversement. De cette façon, les voxels changent rapidement de statut et le front évolue de manière accélérée.

Nous avons implémenté la méthode de Shi et Karl pour permettre la comparaison de notre modèle avec une approche par ensembles de niveaux. Cette méthode d'accélération est donc plus amplement décrite au chapitre 4.

2.2.7 Discussion

Les méthodes d'évolution qui viennent d'être présentées sont plus ou moins dédiées à des représentations, dans la mesure où elles se prêtent plutôt à une implémentation sur des types de surface donnés. Par exemple, la méthode des formes actives, l'algorithme glouton ainsi que l'approche physique s'implémentent naturellement sur des modèles représentés par un ensemble de sommets ou de points de contrôle, comme les modèles discrets et les B-splines. Par contre, il existe une distinction très nette entre les applications visées par les formes actives d'une part et les approches gloutonne et physique d'autre part. Le modèle de formes actives utilise un ensemble de formes d'apprentissage et se rapproche d'une méthode de recalage non-rigide. Il est donc dédié à une application de segmentation en particulier.

A l'inverse, les approches gloutonne et physique ne comportent pas de notion de forme *a priori*, tout du moins dans leur formulation initiale. Elles répondent donc mieux à notre attente de généralité, sachant qu'il est tout de même possible d'y incorporer des informations de forme *a priori* par l'adjonction d'énergies ou de forces relatives à cette problématique. Comme il est plus amplement décrit au chapitre 3, ces approches ont également l'avantage d'être applicables au contour 2D et à la surface 3D avec un formalisme unifié, contrairement

à l'approche variationnelle qui nécessite des modifications majeures pour passer d'un espace à l'autre. Les méthodes de type descente de gradient telles que nous les avons décrites sont très générales et peuvent être appliquées aussi bien sur les modèles discrets que sur les représentations paramétrées. Nous verrons plus loin qu'elles s'apparentent à l'approche physique lorsqu'elles sont appliquées sur les modèles discrets. Quant aux ensembles de niveaux, ils requièrent leurs propres algorithmes d'évolution. Malgré la complexité élevée inhérente à la représentation des ensembles de niveaux, les méthodes d'accélération réduisent de façon significative le temps nécessaire à la convergence. Dans le chapitre 4, les ensembles de niveaux seront comparés avec les modèles discrets, notamment selon des critères de performance.

2.3 Attache aux données

Les méthodes d'évolution, quelles que soient les implémentations de surfaces déformables sur lesquelles elles sont appliquées, utilisent toutes un ou plusieurs terme(s) externe(s), également appelé(s) potentiel(s), qui attache l'évolution du contour ou de la surface aux données image. Ces termes peuvent prendre la forme d'une énergie (un scalaire) ou d'une force (un vecteur) selon l'algorithme d'évolution mis en œuvre, en remarquant qu'une force est très souvent dérivée d'une énergie. Nous présentons dans cette section deux types de termes d'attache aux données :

- les termes basés contour (ou frontière), notés E_{contour} , tiennent compte d'une information locale le long de la surface Γ . Leur rôle est de pousser la surface à se localiser sur les bords de l'image, ce qui implique la notion de dérivation. On utilise généralement le gradient de l'intensité ou d'une caractéristique image de plus haut niveau. Une énergie de contour s'exprime le plus souvent comme une intégrale de contour sur Γ .
- les termes basés région, noté $E_{\text{région}}$, reposent sur des caractéristiques globales de la ou les régions délimitées par la surface. Ils font intervenir la notion d'homogénéité. Une énergie de région s'exprime comme une intégrale de région sur les domaines délimités par Γ .

2.3.1 Termes basés contour

On notera P le terme de contour général, également appelé potentiel. Sur une surface active continue, l'énergie externe basée contour s'écrit

$$E_{\text{contour}}(\Gamma) = \iint_{\Omega} P(\mathbf{s}(u, v)) du dv \quad (2.84)$$

Le terme de contour P traduit localement les variations de l'image. D'une façon générale, il fait intervenir les dérivées partielles de la fonction d'intensité. La valeur $P(\mathbf{x})$ est d'autant plus faible que le point \mathbf{x} est susceptible d'être un contour. Dans cette section, nous décrivons les différents potentiels externes P utilisés dans la littérature.

Gradient d'intensité

Pour attirer la surface vers les bords, les algorithmes d'évolution impliquent l'utilisation d'un potentiel externe, calculé à partir des voxels de l'image I . Ce potentiel peut être une force (un vecteur) ou une énergie (un scalaire). Ces deux types de potentiel sont liés, dans la mesure où la force est la dérivée spatiale de l'énergie. Un champ vectoriel est obtenu à partir du gradient d'un champ scalaire, en dérivant celui-ci par rapport aux trois dimensions. On choisira comme convention que le gradient est le vecteur colonne (ici, pour une image 3D) :

$$\nabla I = \left(\frac{\partial I}{\partial x}, \frac{\partial I}{\partial y}, \frac{\partial I}{\partial z} \right)^T \quad (2.85)$$

Le potentiel externe en un point de la surface s'écrit alors comme une fonction décroissante monotone du gradient.

$$P(\mathbf{s}(u, v)) = \phi(\|\nabla I(\mathbf{s}(u, v))\|) \quad (2.86)$$

De cette manière, la minimisation du terme de contour pousse la surface à se localiser sur les zones où le gradient d'intensité est élevé. Différentes fonctions ϕ ont été utilisées dans la littérature. Pour les représentations explicites, tels les contours actifs en 2D [KWT88] [WS92] ou les maillages en 3D [BE96] [TM04], un choix courant est $\phi(x) = -x$.

A l'inverse, les surfaces implicites, basées sur des représentations en ensembles de niveaux, utilisent le plus souvent :

$$\phi(x) = \frac{1}{1+x} \quad \phi(x) = \exp(-x)$$

comme préconisé par Malladi *et al* [MSV95]. Ainsi, le terme externe intervenant dans la fonction vitesse est proche de 0 lorsque le voxel est un contour et proche de 1 sinon. De cette manière, la fonction d'ensembles de niveaux ψ voit sa vitesse s'annuler lorsqu'elle rencontre un contour.

Pour le calcul du gradient, les dérivées partielles de la fonction d'intensité I peuvent être discrétisées par différences finies centrées :

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial x} &\approx \frac{I(x+1, y, z) - I(x-1, y, z)}{2} \\ \frac{\partial I}{\partial y} &\approx \frac{I(x, y+1, z) - I(x, y-1, z)}{2} \\ \frac{\partial I}{\partial z} &\approx \frac{I(x, y, z+1) - I(x, y, z-1)}{2} \end{aligned} \quad (2.87)$$

Cependant, il s'avère que la norme du gradient calculé ainsi génère des contours relativement faibles et parfois mal localisés. La segmentation de structures 3D a le plus souvent recours à des filtres de détection de contours, tels les opérateurs de Zucker-Hummel ou Monga-Deriche.

Détection de contours 3D

La convolution de l'image avec des filtres détecteurs de contours génère des bords plus significatifs que la dérivation par différences finies. Nous décrivons ici deux méthodes basés sur ce type de filtre.

• Détecteur de Zucker-Hummel

Le filtre de Zucker-Hummel [ZH81] est l'extension 3D du filtre de Hueckel [Hue71]. Ici, un bord tridimensionnel est considéré comme un plan passant par le centre d'une boule unité. Zucker et Hummel proposent de définir ce plan de façon optimale, à l'aide des fonctions de base suivantes :

$$\begin{aligned}\phi_x(x, y, z) &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \phi_y(x, y, z) &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \phi_z(x, y, z) &= \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\end{aligned}\tag{2.88}$$

qui indiquent la direction du plan. A partir de ces fonctions, en considérant que la boule unité est une sphère, les auteurs construisent trois masques de taille $3 \times 3 \times 3$: ZH_x , ZH_y et ZH_z . Chaque masque filtre l'image dans une direction donnée. L'utilisation de l'opérateur de Zucker-Hummel génère des contours mieux localisés que ceux obtenus avec les différences finies.

$$ZH_x = \begin{bmatrix} -k_1 & 0 & k_1 \\ -k_2 & 0 & k_2 \\ -k_1 & 0 & k_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -k_2 & 0 & k_2 \\ -k_3 & 0 & k_3 \\ -k_2 & 0 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -k_1 & 0 & k_1 \\ -k_2 & 0 & k_2 \\ -k_1 & 0 & k_1 \end{bmatrix}$$

$$ZH_y = \begin{bmatrix} -k_1 & -k_2 & -k_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ k_1 & k_2 & k_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -k_2 & -k_3 & -k_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ k_2 & k_3 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -k_1 & -k_2 & -k_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ k_1 & k_2 & k_1 \end{bmatrix}$$

$$ZH_z = \begin{bmatrix} -k_1 & -k_2 & -k_1 \\ -k_2 & -k_3 & -k_2 \\ -k_1 & -k_2 & -k_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_1 \\ k_2 & k_3 & k_2 \\ k_1 & k_2 & k_1 \end{bmatrix}$$

$$k_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} ; k_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} ; k_3 = 1 \quad (2.89)$$

Le gradient est alors calculé comme suit :

$$\nabla I = (I * ZH_x, I * ZH_y, I * ZH_z)^T \quad (2.90)$$

où $*$ est l'opérateur de convolution.

• Détecteur de Monga-Deriche

Le détecteur de contours 3D de Monga-Deriche [MD88] [MDMC90] [MDMC91] est une extension du détecteur de Deriche [Der87], lui-même basé sur les travaux de Canny [Can86]. Canny montre que le filtre optimal g pour détecter un échelon monodimensionnel détérioré avec un bruit blanc gaussien est approximativement la dérivée première d'une gaussienne :

$$g(x) = -\frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \quad (2.91)$$

Ce filtre ayant une réponse impulsionnelle finie, Deriche [Der87] l'étend au cas infini et énonce que le meilleur compromis entre localisation et détection est obtenu avec

$$m(x) = -c \exp(-\alpha |x|) \quad (2.92)$$

où c et α sont deux constantes positives. Monga et Deriche [MDMC91] étendent cette approche en 3D. Le filtre de Monga-Deriche se décompose en trois étapes que nous détaillons aux paragraphes suivants : calcul du gradient, extraction des maxima locaux et seuillage par hystérésis.

En supposant que l'on souhaite détecter les bords orientés dans une direction particulière, il faut générer un masque tridimensionnel pour cette orientation en convoluant une fonction de détection de contour avec deux fonctions de projection. La fonction de détection est alignée avec la direction du bord, tandis que les fonctions de projection sont alignées avec les deux directions orthogonales au bord. Il n'est pas nécessaire de dériver la fonction image dans toutes les directions pour trouver laquelle donne la plus forte variation d'intensité. En effet, le plan tangent d'un volume de direction quelconque peut être déterminé uniquement par sa pente dans les directions x , y et z .

Le gradient est calculé par convolution de l'image avec trois filtres. Pour chacune des directions x , y et z , un filtre 3D séparable est créé. Il est le produit de la fonction de détection m dans la direction considérée et des deux fonctions de projection dans les deux autres directions. La fonction de projection, qui est en fait une fonction de lissage, est choisie comme étant une primitive M de la fonction de détection m :

$$M(x) = s(\alpha |x| + 1) \exp(-\alpha |x|) \quad (2.93)$$

où s est une constante. Les trois filtres sont donc :

$$\begin{aligned} MD_x(x, y, z) &= m(x)M(y)M(z) \\ MD_y(x, y, z) &= M(x)m(y)M(z) \\ MD_z(x, y, z) &= M(x)M(y)m(z) \end{aligned} \quad (2.94)$$

Le gradient est donc calculé par :

$$\nabla I = (I * MD_x, I * MD_y, I * MD_z)^T \quad (2.95)$$

Les maxima locaux du gradient sont ensuite extraits. Pour chaque voxel \mathbf{x} , on considère les 24 faces que composent ses 26 voisins. La droite d'origine \mathbf{x} et de vecteur directeur $\nabla I(\mathbf{x})$ intersecte deux faces. Une interpolation bilinéaire est effectuée pour approximer le gradient à ces points d'intersection, notés \mathbf{x}_1 et \mathbf{x}_2 , à partir du gradient aux sommets des faces. Le voxel \mathbf{x} est alors désigné comme maximum local s'il vérifie la condition

$$\|\nabla I(\mathbf{x})\| \geq \|\hat{\nabla} I(\mathbf{x}_1)\| \text{ et } \|\nabla I(\mathbf{x})\| \geq \|\hat{\nabla} I(\mathbf{x}_2)\| \quad (2.96)$$

où $\hat{\nabla}$ désigne un gradient estimé par l'interpolation bilinéaire. Un seuillage par hystérésis est ensuite appliqué pour générer des bords connexes et d'épaisseur unitaire. Une expansion en composantes connexes est réalisée à partir de tous les maxima locaux dont la norme de gradient est supérieure à un seuil haut vers tous les maxima locaux dont la norme de gradient est supérieure à un seuil bas. L'opérateur de Monga-Deriche est utilisé avec un maillage triangulaire dans [PMT01] et des méthodes par éléments finis dans [CC93] et [MT95a].

Carte des distances

La carte des distances est une énergie externe dont le principal avantage est de diffuser l'information de contour à toute l'image. A chaque voxel, elle permet de connaître la direction à suivre pour se rapprocher du contour le plus proche. A tout voxel \mathbf{x} , le potentiel P associe la distance entre ce voxel et le voxel de contour \mathbf{y} le plus proche :

$$P(\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{y} \in \mathcal{D}} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \quad (2.97)$$

Cela suppose que les voxels de contours aient été extraits au préalable, pour les distinguer de autres. Le filtre de Monga-Deriche décrit précédemment, qui réalise un seuillage sur la norme du gradient des voxels, peut être employé. La transformation de distance est théoriquement de complexité $O(N^2)$, N étant le nombre de voxels. La distance de chanfrein [Bor84] est une technique d'approximation de la distance euclidienne, qui réduit cette complexité à $O(Nm)$ (m étant la taille du masque de chanfrein). Elle est calculée par passage de masques dans les directions x , y et z , chaque direction nécessitant deux passes. Dans [BE96], une carte des distances est utilisée pour attirer approximativement la surface, tandis que la norme du gradient est utilisée pour affiner la surface lorsque celle-ci est proche des contours de l'objet.

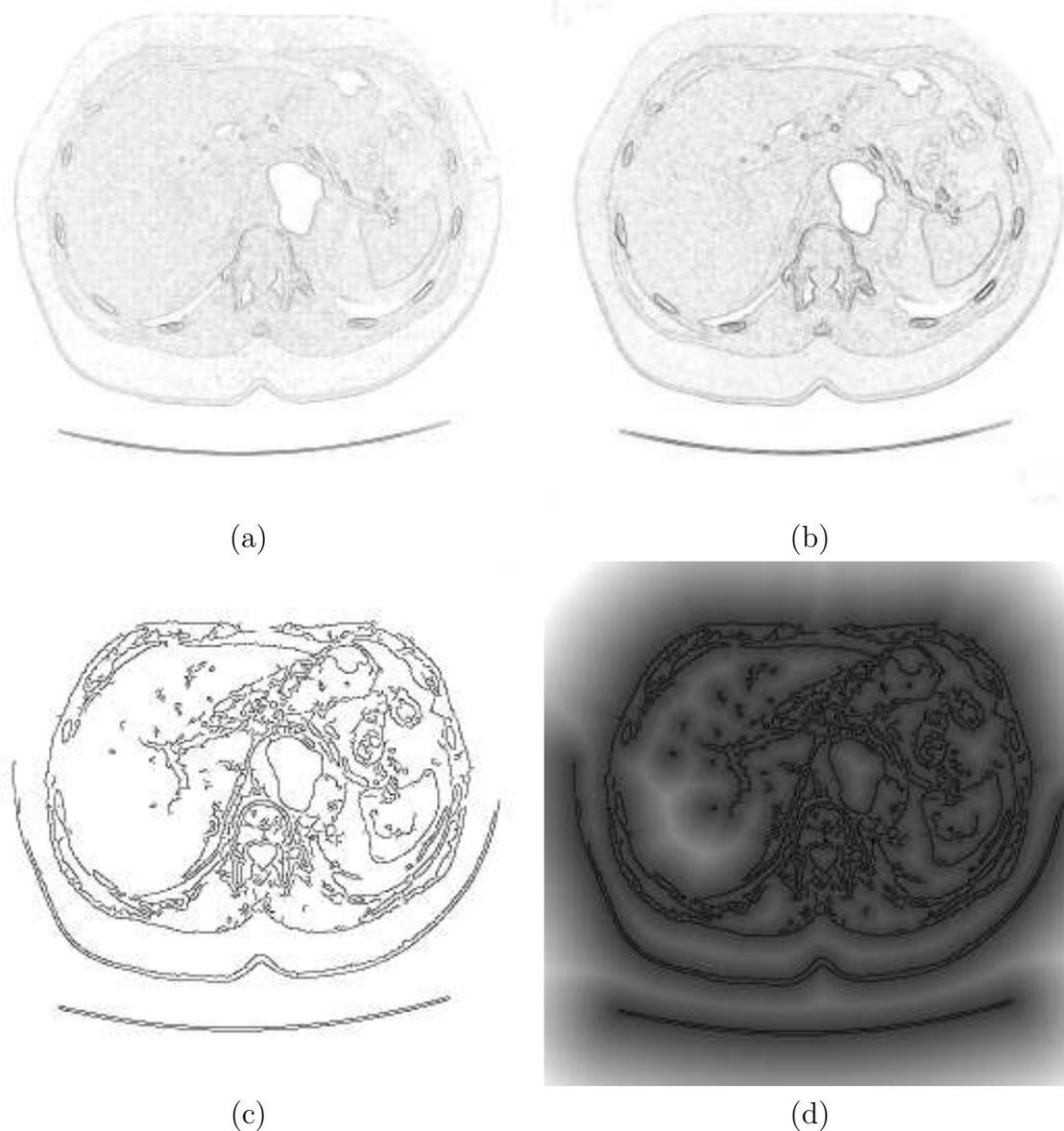


FIG. 2.9 – Détection des bords d'une coupe axiale de l'abdomen (scanner). (a) Différences finies (b) Filtre de Zucker-Hummel (c) Filtre de Monga-Deriche (seuil bas=0.5, seuil haut=0.8) (d) Carte des distances aux bords obtenues avec Monga-Deriche. Les normes de gradient sont représentées en négatif

Tenseur de structure

Le tenseur de structure est utile pour représenter la structure locale des données. Ceci permet entre autres de distinguer les plans et les zones anguleuses des contours. Dans

[TD02], il est défini pour toute fonction vectorielle \mathbf{f} :

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &: \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^p \\ \mathbf{x} &\longmapsto (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_p(\mathbf{x})) \end{aligned} \quad (2.98)$$

Pour cette fonction à valeur dans \mathbb{R}^p , le tenseur de structure \mathbf{T} est une matrice $p \times p$ définie comme suit :

$$\mathbf{T} = \sum_{k=1}^p \nabla f_k (\nabla f_k)^T \quad (2.99)$$

Le tenseur est une matrice de moment 2, car il est fonction des dérivées partielles de l'image au degré 2. Pour une image 3D scalaire ayant \mathbb{R} comme ensemble d'arrivée, le tenseur de structure se développe en :

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial I}{\partial x}\right)^2 & \frac{\partial I}{\partial x} \frac{\partial I}{\partial y} & \frac{\partial I}{\partial x} \frac{\partial I}{\partial z} \\ \frac{\partial I}{\partial x} \frac{\partial I}{\partial y} & \left(\frac{\partial I}{\partial y}\right)^2 & \frac{\partial I}{\partial y} \frac{\partial I}{\partial z} \\ \frac{\partial I}{\partial x} \frac{\partial I}{\partial z} & \frac{\partial I}{\partial y} \frac{\partial I}{\partial z} & \left(\frac{\partial I}{\partial z}\right)^2 \end{bmatrix} \quad (2.100)$$

A partir du tenseur \mathbf{T} sont déterminées les valeurs propres ($\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$) et les vecteurs propres correspondants ($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$). Ils permettent une description des caractéristiques de contours plus précise que celle fournie par une simple norme du gradient. Par exemple, de nombreux algorithmes de détection de coins ou de points d'intérêt [For86] utilisent les valeurs propres issues du tenseur de structure afin de quantifier la vraisemblance des mesures.

Les valeurs propres indiquent les variations d'intensité des structures locales de l'image, tandis que les orientations de ces structures sont données par les vecteurs propres. Les structures locales peuvent être visualisées comme des ellipsoïdes dont les rayons sont les valeurs propres de \mathbf{T} triées par ordre décroissant. Ainsi, si la structure locale est un bord, \mathbf{e}_1 est un vecteur unitaire normal au bord, tandis que le vecteur \mathbf{e}_2 lui est tangent. Il existe dans l'espace trois configurations caractéristiques :

- Si $\lambda_1 \gg \lambda_2 \approx \lambda_3 \approx 0$, le signal varie principalement dans la direction de \mathbf{e}_1 . Le voisinage décrit une structure planaire. Le voxel est un élément de surface ("surfel"), où \mathbf{e}_1 est le vecteur normal à ce plan. \mathbf{e}_2 et \mathbf{e}_3 sont tangents au plan.
- Si $\lambda_1 \approx \lambda_2 \gg \lambda_3 \approx 0$. Le voisinage est constant dans une direction et décrit une structure linéaire. Un élément de courbe ("curvel") est défini lorsque $\lambda_2 - \lambda_3 \gg 0$. Le vecteur \mathbf{e}_3 est alors tangent à la courbe.
- Si $\lambda_1 \approx \lambda_2 \approx \lambda_3 \gg 0$, on est en présence d'une diffusion isotrope, donc une région uniforme. Le voisinage n'a pas d'orientation particulière (la représentation graphique de la structure est sphérique).

Dans le cas où les valeurs propres indiquent une structure planaire, il est possible de calculer un estimateur de planarité Δ :

$$\Delta(\mathbf{T}) = \|\mathbf{T} - \mathbf{T}_1\| \quad (2.101)$$

où \mathbf{T}_1 est le tenseur d'orientation d'un signal qui ne varierait que selon \mathbf{e}_1 : $\mathbf{T}_1 = \lambda_1 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^T$. $\Delta(\mathbf{T})$ se développe en :

$$\begin{aligned} \Delta(\mathbf{T}) &= \|\lambda_2 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2^T + \lambda_3 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3^T\| \\ &= \sqrt{\lambda_2^2 + \lambda_3^2} \end{aligned} \quad (2.102)$$

L'estimateur $\Delta(\mathbf{T})$ est proche de zéro en présence d'une structure planaire. Dans [Ahl96], l'auteur cherche à pénaliser les points de la surface active se trouvant sur des structures planaires, les forçant à se localiser sur les voxels de contour. L'estimateur de planarité est donc utilisé comme potentiel externe :

$$P(\mathbf{x}) = -\frac{\sqrt{\lambda_2^2 + \lambda_3^2}}{\lambda_1} \quad (2.103)$$

où λ_1 , λ_2 et λ_3 sont les valeurs propres du tenseur au voxel \mathbf{x} . Les tenseurs utilisés dans [Ahl96] sont ceux définis par Knutsson [Knu89], basés non pas sur le gradient mais sur des filtres de quadrature.

Flux de vecteur gradient

Xu et Prince [XP98] ont introduit le flux de vecteur gradient (*gradient vector flow*, GVF), un champ de forces basé sur des équations de diffusion généralisées, souvent rencontrées dans la diffusion de chaleur ou la mécanique des fluides. L'intérêt est de diffuser l'information de gradient pour augmenter le champ de capture des contours. De cette façon, les contours attirent la surface déformable même si celle-ci est éloignée. Le flux de vecteur gradient est un champ vectoriel \mathbf{v} qui associe un vecteur à chaque voxel de l'image :

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &: \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \mathbf{x} &\longmapsto \mathbf{v}(\mathbf{x}) = (v_x(\mathbf{x}), v_y(\mathbf{x}), v_z(\mathbf{x}))^T \end{aligned} \quad (2.104)$$

Pour construire un champ vectoriel régulier et conforme aux bords de l'image I , il faut déterminer \mathbf{v} qui minimise l'énergie E_{GVF} :

$$E_{\text{GVF}}(\mathbf{v}) = \iiint_{\mathcal{D}} \mu \left(\left\| \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \right\|^2 + \left\| \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} \right\|^2 + \left\| \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \right\|^2 \right) + \|\nabla I\|^2 \|\mathbf{v} - \nabla I\|^2 d\mathbf{x} \quad (2.105)$$

Cette formulation variationnelle permet d'obtenir un champ lisse aux endroits ne présentant pas de variation d'intensité importante. En particulier, lorsque $\|\nabla I\|$ est petit, les dérivées partielles du champ vectoriel sont prépondérantes dans l'énergie, ce qui a pour effet de

lisser le champ (la direction des vecteurs varie lentement). D'autre part, lorsque $\|\nabla I\|$ est grand, l'énergie est dominée par le second terme et est minimisée en posant $\mathbf{v} = \nabla I$. Le paramètre μ est un paramètre de régularisation qui pondère l'importance du premier terme par rapport au deuxième. Les auteurs préconisent de régler μ selon la quantité de bruit présent dans l'image. Plus l'image est bruitée, plus il faut imposer au champ vectoriel d'être régulier en augmentant μ . Le problème de minimisation de l'énergie de champ vectoriel E_{GVF} est transformé en une résolution d'équation aux dérivées partielles à l'aide du calcul variationnel. L'équation d'Euler-Lagrange suivante est obtenue :

$$\begin{cases} \mu \nabla^2 v_x - \left(v_x - \frac{\partial I}{\partial x} \right) \|\nabla I\|^2 = 0 \\ \mu \nabla^2 v_y - \left(v_y - \frac{\partial I}{\partial y} \right) \|\nabla I\|^2 = 0 \\ \mu \nabla^2 v_z - \left(v_z - \frac{\partial I}{\partial z} \right) \|\nabla I\|^2 = 0 \end{cases} \quad (2.106)$$

Le GVF est déterminé par résolution itérative de l'équation d'Euler-Lagrange, en ajoutant un terme d'inertie et en discrétisant les dérivées partielles. Les dérivées spatiales sont discrétisées par différences finies centrées, tandis que la dérivée temporelle l'est avec la méthode d'Euler. Il convient donc de choisir un pas temporel adéquat. Le GVF étant un champ vectoriel, il est incorporé dans l'équation d'évolution d'un modèle déformable et non pas dans son énergie. Il est adapté aux approches variationnelles ou physiques, qui utilisent des forces dérivées du potentiel externe :

$$\nabla P(\mathbf{x}) = \mathbf{v}(\mathbf{x}) \quad (2.107)$$

Un GVF 3D est utilisé avec une B-surface dans [CT05] pour la segmentation de structures cérébrales en imagerie par résonance magnétique. Il est également combiné avec des maillages simplex dans [Xu99]. La méthode de Li et Acton [LA06], basée sur une convolution de l'image avec un masque vectoriel, permet d'obtenir de manière simplifiée un champ vectoriel diffusé, similaire au GVF. La méthode du N-GVF [JCSS07] et des contours actifs à analyse de champ de force (*force field analysis snakes*) [HH05] sont des améliorations du GVF, permettant notamment une meilleure convergence du contour actif dans de zones étroites.

2.3.2 Termes basés région

La plupart des termes de région ont été développés pour les contours actifs 2D, c'est pourquoi nous les décriront comme tels. Les termes de région font intervenir des intégrales de domaines (intégrales doubles) sur les régions délimitées par la courbe Γ , par opposition aux termes de frontière qui sont généralement des intégrales de contour sur Γ . Dans les approches basées région, le but est de déterminer une partition du domaine image \mathcal{D} en N_R régions disjointes notées R_i . La notion sous-jacente ici est celle de l'homogénéité : une

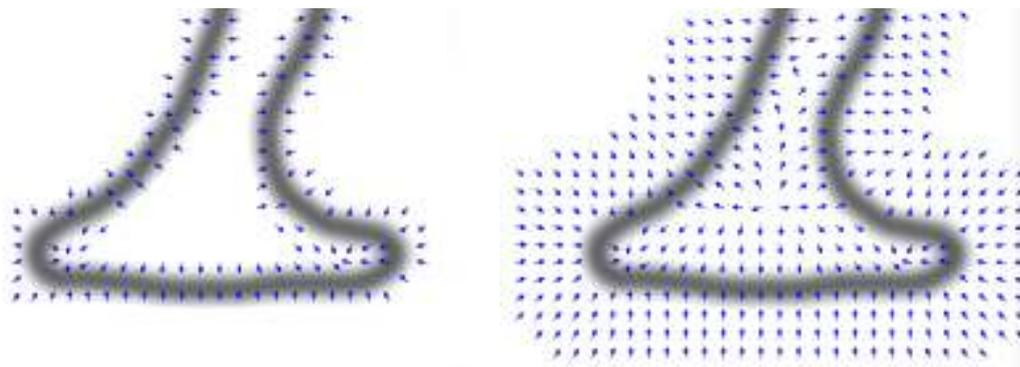


FIG. 2.10 – Champ de vecteur issu du gradient (gauche) et champ de vecteur diffusé par la méthode du GVF (droite)

région doit vérifier un critère d'homogénéité, défini globalement sur l'ensemble de ses pixels. La partition du domaine \mathcal{D} vérifie les conditions :

$$\begin{aligned} \bigcup_{i=1}^{N_R} R_i &= \mathcal{D} \\ R_i \cap R_j &= \emptyset \quad \forall 1 \leq i \leq N_R, 1 \leq j \leq N_R, i \neq j \end{aligned} \quad (2.108)$$

Pour les approches frontières que sont les contours déformables, nous nous plaçons dans le cas particulier où le contour Γ sépare le domaine image \mathcal{D} en deux régions : R_{in} et $R_{out} = \mathcal{D} \setminus R_{in}$.

$$\begin{aligned} R_{in} \cup R_{out} &= \mathcal{D} \\ R_{in} \cap R_{out} &= \emptyset \end{aligned} \quad (2.109)$$

Il est important de noter que les régions R_{in} et R_{out} ne sont pas nécessairement connexes. En effet, nombre de contours actifs utilisent le formalisme des ensembles de niveaux, permettant au modèle déformable de contenir plusieurs courbes fermées qui peuvent se séparer ou fusionner librement. La plupart des termes de région font intervenir des intégrales de région sur les domaines R_{in} et R_{out} . Certaines approches, comme les contours actifs statistiques décrits ci-dessous [IP95] considèrent uniquement la région intérieure R_{in} dans la fonctionnelle d'énergie.

Une des premiers modèles déformables basés région est introduit dans les travaux de Cohen *et al* [CBA93]. Une intégrale de région apparaît alors dans la fonctionnelle d'énergie, le but étant de reconstruire une frontière séparant deux régions de régularité différente. De façon générale, l'utilisation d'énergies de région permet de mieux prendre en compte les données lorsque l'information de frontière est insuffisante. De plus, elle diminue la sensibilité à l'initialisation dont souffrent les modèles déformables basés uniquement contour. En effet, comme le terme de région est calculé globalement, le contour peut se dilater tant qu'il vérifie un critère d'homogénéité. Dans de nombreuses approches, ce critère d'homogénéité est fonction de données statistiques sur les intensités des pixels : moyenne, écart-type, variance, etc.

Contours actifs à anticipation

Le modèle de contour actif *anticipating snake* développé par Ronfard [Ron94] fonde son critère d'homogénéité sur la distance de Ward [War63] entre deux régions :

$$d_{Ward}(R_A, R_B) = E_{\text{région}}(R_A \cup R_B) - E_{\text{région}}(R_A) - E_{\text{région}}(R_B) \quad (2.110)$$

qui est considéré par Beaulieu et Goldberg [BG89] comme le coût de fusion des deux régions R_A et R_B . L'énergie d'une région R est la variance des intensités de ses pixels :

$$E_{\text{région}}(R) = \iint_R (I(\mathbf{x}) - \mu_R)^2 d\mathbf{x} \quad (2.111)$$

où μ_R est la moyenne des intensités dans la région R . Remarquons que des intégrales similaires se retrouvent dans bon nombre d'approches décrites dans cette section. Sachant que $\mathbf{x} = (x, y)^T$, le différentiel $d\mathbf{x}$ peut se réécrire $dx dy$. Dans le modèle de Ronfard, l'énergie du contour Γ est uniquement la distance de Ward entre les régions R_{in} et R_{out} :

$$E_{\text{région}}(\Gamma) = d_{Ward}(R_{in}, R_{out}) \quad (2.112)$$

Contours actifs statistiques

Le modèle de contour actif statistique (*statistical snake*) ou région active, introduit par Ivins et Porrill [IP95], incorpore un terme d'homogénéité dans l'énergie d'un contour actif paramétrique. Il admet comme énergie de région :

$$E_{\text{région}}(\Gamma) = - \iint_{R_{in}} G(I(\mathbf{x})) d\mathbf{x} \quad (2.113)$$

La fonction G indique si un pixel est en adéquation avec la région. Elle est similaire au critère d'agrégation utilisé en croissance de région.

$$G(I(\mathbf{x})) = \begin{cases} +1 & \text{si } \frac{|I(\mathbf{x}) - \mu_{in}|}{\sigma_{in}} < k \\ -1 & \text{si } \frac{|I(\mathbf{x}) - \mu_{in}|}{\sigma_{in}} > k \end{cases} \quad (2.114)$$

Minimiser $E_{\text{région}}$ revient à maximiser le nombre de pixels en adéquation avec la région. Le seuil k définit la tolérance par rapport à la moyenne et doit être choisi selon l'application.

Principe de variance minimale

Le modèle de Chan et Vese [CV01] se base sur l'approche de Mumford-Shah [MS89], qui reformule le problème de segmentation comme la recherche d'une fonction f régulière

par morceaux (par régions) qui approche le mieux l'image I , les différentes régions étant délimitées par Γ . La fonctionnelle de Mumford-Shah F_{MS} s'écrit :

$$F_{\text{MS}}(f, \Gamma) = \lambda \iint_{\mathcal{D}} (f(\mathbf{x}) - I(\mathbf{x}))^2 d\mathbf{x} + \iint_{\mathcal{D} \setminus \Gamma} \|\nabla f(\mathbf{x})\|^2 d\mathbf{x} + \int_{\Gamma} ds \quad (2.115)$$

Le premier terme indique que la fonction f doit prendre des valeurs proches de celles de l'image. Le deuxième terme traduit le fait que f doit varier lentement en dehors des zones de transitions, représentées par le contour Γ . Sur le contour, on autorise f à être discontinue. Le dernier terme est la longueur totale du contour, s étant l'élément d'abscisse curviligne. L'image solution f qui minimise F_{MS} est formée de régions homogènes R_i et du contour Γ .

Dans le modèle de Chan et Vese, f prend uniquement deux valeurs : les moyennes de I à l'intérieur et à l'extérieur de Γ , ce qui conduit à l'énergie externe suivante :

$$E_{\text{région}}(\Gamma) = \omega_{in} \iint_{R_{in}} (I(\mathbf{x}) - \mu_{in})^2 d\mathbf{x} + \omega_{out} \iint_{R_{out}} (I(\mathbf{x}) - \mu_{out})^2 d\mathbf{x} \quad (2.116)$$

où μ_{in} et μ_{out} sont les intensités moyennes à l'intérieur et à l'extérieur du contour Γ :

$$\mu_{in} = \frac{\iint_{R_{in}} I(\mathbf{x}) d\mathbf{x}}{\iint_{R_{in}} d\mathbf{x}} \quad \mu_{out} = \frac{\iint_{R_{out}} I(\mathbf{x}) d\mathbf{x}}{\iint_{R_{out}} d\mathbf{x}} \quad (2.117)$$

Minimiser cette énergie revient à séparer l'image en régions ayant la variance la plus faible possible. L'importance accordée aux variances des régions est pondérée par les coefficients ω_{in} et ω_{out} . Les auteurs utilisent une représentation en ensembles de niveaux. Les régions R_{in} et R_{out} sont facilement déterminées par le signe de la fonction d'ensembles de niveaux ψ .

$$\begin{aligned} R_{in} &= \{\mathbf{x} \in \mathcal{D} \mid \psi(\mathbf{x}) \geq 0\} \\ R_{out} &= \{\mathbf{x} \in \mathcal{D} \mid \psi(\mathbf{x}) < 0\} \end{aligned} \quad (2.118)$$

L'énergie de région en fonction de ψ devient

$$\begin{aligned} E_{\text{région}}(\psi) &= \omega_{in} \iint_{\mathcal{D}} (I(\mathbf{x}) - \mu_{in})^2 H(\psi(\mathbf{x})) d\mathbf{x} \\ &+ \omega_{out} \iint_{\mathcal{D}} (I(\mathbf{x}) - \mu_{out})^2 (1 - H(\psi(\mathbf{x}))) d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (2.119)$$

où H est l'échelon de Heaviside :

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.120)$$

L'interprétation est simple : $H(\psi(\mathbf{x}))$ vaut 1 lorsque \mathbf{x} est dans la région R_{in} et 0 lorsqu'il est à l'extérieur. Les intensités moyennes sont alors :

$$\mu_{in} = \frac{\iint_{\mathcal{D}} I(\mathbf{x})H(\psi(\mathbf{x}))d\mathbf{x}}{\iint_{\mathcal{D}} H(\psi(\mathbf{x}))d\mathbf{x}} \quad \mu_{out} = \frac{\iint_{\mathcal{D}} I(\mathbf{x})(1 - H(\psi(\mathbf{x})))d\mathbf{x}}{\iint_{\mathcal{D}} (1 - H(\psi(\mathbf{x})))d\mathbf{x}} \quad (2.121)$$

L'énergie externe de Chan et Vese est fonction de la variance des niveaux de gris à l'intérieur et à l'extérieur du contour. A l'origine utilisé pour la segmentation 2D, le modèle de Chan et Vese est étendu à une surface 3D par Dufour *et al* [DST⁺05]. Une extension récente développée par Scherl *et al* [SHPL07] prévoit plusieurs intensités moyennes dans l'arrière-plan :

$$E_{\text{région}}(\psi) = \omega_{in} \iint_{\mathcal{D}} (I(\mathbf{x}) - \mu_{in})^2 H(\psi(\mathbf{x}))d\mathbf{x} + \omega_{out} \iint_{\mathcal{D}} \min((I(\mathbf{x}) - \mu_{out_1})^2, (I(\mathbf{x}) - \mu_{out_2})^2)(1 - H(\psi(\mathbf{x})))d\mathbf{x} \quad (2.122)$$

où μ_{out_1} et μ_{out_2} sont les moyennes des intensités rencontrées dans la région extérieure. Le modèle est utilisé pour la segmentation de la carotide. L'énergie région de Chan et Vese a également été appliquée sur un maillage triangulaire dans [SU05]. N'employant pas les ensembles de niveaux, cette approche utilise un algorithme de remplissage 3D pour déterminer les voxels à l'intérieur et à l'extérieur de la surface.

Descripteurs de région

Les travaux de Jehan-Besson *et al* [JB03], [JBBA03], [JBBAF03] font intervenir la notion de descripteur de région :

$$E_{\text{région}}(\Gamma) = \iint_{R_{in}} k_{in}(\mathbf{x}, R_{in})d\mathbf{x} + \iint_{R_{out}} k_{out}(\mathbf{x}, R_{out})d\mathbf{x} \quad (2.123)$$

Le domaine R_{in} représente les objets à détecter, tandis que R_{out} représente l'arrière-plan. Les fonctions k_{in} et k_{out} sont respectivement les descripteurs de région des objets à segmenter et de l'arrière-plan.

Dans [JB03], plusieurs descripteurs de région sont mis en oeuvre. On considère l'entropie S d'un vecteur aléatoire \mathbf{x} de dimension n décrit par une fonction de distribution de probabilité f_X . Lorsque f_X est une loi gaussienne multidimensionnelle de moyenne μ et de matrice de covariance Σ , l'entropie peut s'écrire en fonction du déterminant de Σ :

$$S(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \ln((2\pi e)^n \det(\Sigma)) \quad (2.124)$$

Si \mathbf{x} correspond aux intensités des pixels contenus dans une région d'une image ayant pour ensemble d'arrivée \mathbb{R}^n , l'entropie $S(\mathbf{x})$ est liée à la complexité de cette région. La minimiser revient à diminuer la complexité de la région, rendant cette dernière plus homogène. L'entropie, et indirectement le déterminant de la matrice de covariance, apparaît alors comme un descripteur de région pertinent. Sur des images en niveaux de gris, on souhaite minimiser la variance σ^2 de chaque région :

$$\begin{aligned} k_{in}(R_{in}) &= \phi(\sigma^2(R_{in})) \\ k_{out}(R_{out}) &= \phi(\sigma^2(R_{out})) \end{aligned} \quad (2.125)$$

où ϕ est une fonction positive, croissante et dérivable. Un choix proposé est $\phi(x) = \ln(1+x)$. Sur des images couleur à trois composantes, la matrice de covariance s'écrit

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (2.126)$$

avec

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{\mathcal{A}} \iint_R (I_i(\mathbf{x}) - \mu_i)(I_j(\mathbf{x}) - \mu_j) d\mathbf{x} \quad \forall 1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 3, i \neq j \quad (2.127)$$

où R est la région considérée, d'aire \mathcal{A} . Le déterminant s'écrit

$$\det(\Sigma) = \sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} + 2\sigma_{12}\sigma_{13}\sigma_{23} - \sigma_{11}\sigma_{23}^2 - \sigma_{22}\sigma_{13}^2 - \sigma_{33}\sigma_{12}^2 \quad (2.128)$$

Les descripteurs de région sont alors

$$\begin{aligned} k_{in}(R_{in}) &= \phi(\det(\Sigma_{in})) \\ k_{out}(R_{out}) &= \phi(\det(\Sigma_{out})) \end{aligned} \quad (2.129)$$

Les produits des variances sont également utilisés. Ils permettent une réduction du temps de calcul, comparé à l'utilisation du déterminant de la matrice de covariance, sans amoindrir la qualité de la segmentation :

$$\begin{aligned} k_{in}(R_{in}) &= \phi(\sigma_{11}(R_{in})\sigma_{22}(R_{in})\sigma_{33}(R_{in})) \\ k_{out}(R_{out}) &= \phi(\sigma_{11}(R_{out})\sigma_{22}(R_{out})\sigma_{33}(R_{out})) \end{aligned} \quad (2.130)$$

Ces descripteurs statistiques se basent sur le principe de distribution gaussienne des intensités. Par la suite, cette approche est généralisée à des distributions de probabilités quelconques, en étudiant les histogrammes des régions [JBBAF03]. L'histogramme d'une région est estimé par la méthode de Parzen [DH73]. Soient une région R d'aire \mathcal{A} et une intensité α . L'estimation de l'histogramme normalisé de R se calcule comme suit :

$$\hat{h}(R, \alpha) = \frac{1}{\mathcal{A}} \iint_R g_\sigma(I(\mathbf{x}) - \alpha) d\mathbf{x} \quad (2.131)$$

où g_σ est une loi de probabilité gaussienne centrée en zéro et d'écart-type σ . En tant que descripteur de la région R , une distance d_h entre l'histogramme estimé $\hat{h}(R)$ et un histogramme de référence h_{ref} est utilisée :

$$\begin{aligned} k_{in}(R_{in}) &= d_h(R_{in}) \\ k_{out}(R_{out}) &= d_h(R_{out}) \end{aligned} \quad (2.132)$$

La distance entre deux histogrammes prend en compte l'ensemble des intensités α , définies sur \mathbb{R} :

$$d_h(R) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\hat{h}(R, \alpha), h_{ref}(\alpha)) d\alpha \quad (2.133)$$

Différentes fonctions de comparaison sont testées :

- le carré de la norme euclidienne :

$$\phi(\hat{h}(R, \alpha), h_{ref}(\alpha)) = \left(\hat{h}(R, \alpha) - h_{ref}(\alpha) \right)^2 \quad (2.134)$$

- la distance de Hellinger :

$$\phi(\hat{h}(R, \alpha), h_{ref}(\alpha)) = \left(\sqrt{\hat{h}(R, \alpha)} - \sqrt{h_{ref}(\alpha)} \right)^2 \quad (2.135)$$

- la distance de Kullback-Leibler :

$$\phi(\hat{h}(R, \alpha), h_{ref}(\alpha)) = \frac{1}{2} \left(h_{ref}(\alpha) \log \left(\frac{h_{ref}(\alpha)}{\hat{h}(R, \alpha)} \right) + \hat{h}(R, \alpha) \log \left(\frac{\hat{h}(R, \alpha)}{h_{ref}(\alpha)} \right) \right) \quad (2.136)$$

- la fonction du chi-2 :

$$\phi(\hat{h}(R, \alpha), h_{ref}(\alpha)) = \frac{\left(\hat{h}(R, \alpha) - h_{ref}(\alpha) \right)^2}{h_{ref}(\alpha)} \quad (2.137)$$

Quels que soient les descripteurs de région employés, Jehan-Besson utilise une représentation en ensembles de niveaux pour l'implémentation du modèle déformable. L'équation d'évolution de la fonction d'ensembles de niveaux ψ est déterminée à partir de l'équation d'évolution du contour explicite Γ . Celle-ci est calculée à partir de la fonctionnelle générale 2.123, en utilisant les outils de dérivation de domaine [JBBAF03; LJBF⁺06].

Régions actives géodésiques

Paragios et Deriche [PD02a] [PD05] introduisent le concept de régions actives géodésiques. On se place ici dans le cadre d'une partition de l'image en N_R régions R_i , $1 \leq i \leq N_R$. La partition est notée \mathcal{P} :

$$\mathcal{P} = \bigcup_{i=1}^{N_R} R_i \quad (2.138)$$

La modélisation du critère à minimiser suit une approche bayésienne. La probabilité *a posteriori* d'avoir une partition \mathcal{P} est utilisée pour dériver un critère de segmentation à satisfaire. Soit $P(\mathcal{P}|I)$ la probabilité *a posteriori* de la réalisation de \mathcal{P} étant donnée l'image I . Selon le théorème de Bayes :

$$P(\mathcal{P}|I) = \frac{P(I|\mathcal{P})P(\mathcal{P})}{P(I)} \quad (2.139)$$

où $P(I|\mathcal{P})$ est la fonction de vraisemblance de l'image I étant donnée la partition \mathcal{P} . $P(\mathcal{P})$ est la probabilité d'apparition de \mathcal{P} parmi l'espace de toutes les partitions admissibles. $P(I)$ est la probabilité d'avoir en entrée l'image I parmi toutes les images possibles.

Les partitions étant considérées comme équiprobables et l'image I étant fournie en entrée dans tous les cas, les termes constants $P(I)$ et $P(\mathcal{P})$ sont ignorés. La probabilité *a posteriori* $P(\mathcal{P}|I)$ peut se ré-écrire :

$$P(\mathcal{P}|I) = P(I|\mathcal{P}) \quad (2.140)$$

Les régions sont considérées comme indépendantes, ce qui conduit à la probabilité jointe

$$P(\mathcal{P}|I) = P(I|\bigcup_{i=1}^{N_R} R_i) = \prod_{i=1}^{N_R} P(I|R_i) \quad (2.141)$$

Dans ce modèle, les intensités des pixels sont considérées comme indépendantes :

$$P(I|R_i) = \prod_{\mathbf{x} \in R_i} P(I(\mathbf{x})|R_i) \quad (2.142)$$

La partition optimale est celle qui maximise la probabilité *a posteriori* $P(\mathcal{P}|I)$. Les logarithmes sont introduits afin de transformer le produit en intégrale. Une énergie, sous forme d'intégrale de région, est alors obtenue. Maximiser $P(\mathcal{P}|I)$ est équivalent à minimiser $-\ln(P(\mathcal{P}|I))$, d'où la fonctionnelle d'énergie suivante :

$$E(\mathcal{P}) = - \sum_{i=1}^{R_N} \iint_{R_i} \ln(P(I(\mathbf{x})|R_i)) d\mathbf{x} \quad (2.143)$$

L'énergie du contour Γ est assimilée à celle de la partition qu'elle engendre :

$$E_{\text{région}}(\Gamma) = E(\mathcal{P}) \quad (2.144)$$

Une fonctionnelle d'énergie similaire se trouve dans l'approche par compétition de régions développée par Zhu et Yuille [ZLY95; ZY96]. En plus du terme de région, Zhu et Yuille cherchent à minimiser la longueur totale du contour :

$$F^{ZY}(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{R_N} \left\{ \alpha \int_{\partial R_i} ds - \iint_{R_i} \ln(P(I(\mathbf{x})|R_i)) d\mathbf{x} \right\} \quad (2.145)$$

où le premier terme est la longueur du contour pondérée par un coefficient α (s est l'abscisse curviligne). L'équation 2.143 est la formulation générale de l'énergie du modèle de régions actives géodésiques pour une segmentation en N_R régions. Si l'on considère maintenant une portion de contour Γ qui sépare deux régions R_{in} et R_{out} , l'énergie de région correspondante est :

$$E_{\text{région}}(\Gamma) = - \iint_{R_{in}} \ln(P(I(\mathbf{x})|R_{in})) - \iint_{R_{out}} \ln(P(I(\mathbf{x})|R_{out})) d\mathbf{x} \quad (2.146)$$

L'utilisation du théorème de Green, pour convertir les intégrales de région en intégrales de contour, et le calcul variationnel conduisent aux équations d'évolution suivantes :

$$\frac{d\mathbf{c}(u, t)}{dt} = (\ln(P(I(\mathbf{c}(u))|R_{in})) - \ln(P(I(\mathbf{c}(u))|R_{out}))) \vec{\mathbf{n}}(u) \quad (2.147)$$

Suivant cette loi d'évolution, le contour se déforme dans sa direction normale jusqu'à atteindre la position qui prend le mieux en compte les propriétés d'intensité des régions. Une fois le contour implémenté en ensembles de niveaux, on obtient :

$$\frac{d\psi(\mathbf{x}, t)}{dt} = (\ln(P(I(\mathbf{x})|R_{in})) - \ln(P(I(\mathbf{x})|R_{out}))) \frac{\nabla\psi(\mathbf{x}, t)}{\|\nabla\psi(\mathbf{x}, \mathbf{t})\|} \quad (2.148)$$

A cette force s'ajoute un terme de courbure ainsi qu'un terme de contour, fonction de $\nabla I(\mathbf{x})$, selon le principe des contours actifs géodésiques [AT05] [CKS95] [CKS97]. Cette approche est utilisée pour la segmentation du ventricule gauche en IRM cardiaque [PD02b; Par03]. Dans [PD02b], chaque probabilité est considérée comme une loi gaussienne, dont les paramètres sont estimés à l'aide de l'algorithme EM (Expectation-Maximization). Les régions géodésiques ont également été utilisées pour le suivi [PD99; PD05].

Caractéristiques de texture

Chakraborty *et al* [CSD96] utilisent une énergie de région qui ne fait pas intervenir l'image directement mais une image classifiée selon une information de texture. L'analyse de texture employée ici se base sur les travaux de Cross et Jain [CJ83] et ceux de Manjunath et Chellappa [MC91]. Les textures sont modélisées par des champs de Markov aléatoires (*Markov random fields*, MRF). Nous présentons tout d'abord l'approche probabiliste générale des champs de Markov. Considérons le cas d'une famille de variables aléatoires X définie sur un domaine \mathcal{D} . X est un champ de Markov si toutes ses réalisations Y vérifient la relation suivante, pour tout site \mathbf{x} de \mathcal{D} :

$$P(X(\mathbf{x}) = Y(\mathbf{x})|Y \setminus \mathbf{x}) = P(X(\mathbf{x}) = Y(\mathbf{x})|Y(\mathbf{y}), \mathbf{y} \in V(\mathbf{x})) \quad (2.149)$$

où Y est une réalisation de X , $Y \setminus \mathbf{x}$ est la réalisation en excluant le site \mathbf{x} et l'ensemble $V(\mathbf{x})$ est un voisinage du site \mathbf{x} . Si l'on connaît la réalisation Y sur tous les sites excepté \mathbf{x} , la probabilité que X ait la réalisation Y au site \mathbf{x} est fonction de cette même réalisation au voisinage de \mathbf{x} . Autrement dit, la valeur de Y à un site dépend uniquement de la valeur

de Y aux sites voisins. D'après le théorème de Hammersley-Clifford, un champ de Markov aléatoire peut s'écrire sous forme d'un champ de Gibbs :

$$P(X = Y) = \frac{1}{Z(X)} \exp(-U(Y)) \quad (2.150)$$

où $U(Y)$ est la fonction d'énergie associée à la réalisation Y . Différentes fonctions d'énergies sont utilisées selon l'application. Nous détaillons un peu plus loin l'expression de U dans le cas d'un champ de Markov gaussien pour la segmentation. La constante de normalisation Z s'exprime en fonction des énergies de toutes les réalisations possibles :

$$Z(X) = \sum_{Y \in \mathcal{X}} \exp(-U(Y)) \quad (2.151)$$

où \mathcal{X} est l'ensemble des réalisations possibles. On réécrit la probabilité pour un site \mathbf{x} donné :

$$P(X(\mathbf{x}) = Y(\mathbf{x})) = \frac{\exp(-U_{\mathbf{x}}(Y(\mathbf{x})|V(\mathbf{x})))}{\sum_{g \in \mathcal{G}} \exp(-U_{\mathbf{x}}(g|V(\mathbf{x})))} \quad (2.152)$$

où $U_{\mathbf{x}}(g|V(\mathbf{x}))$ est l'énergie du site \mathbf{x} s'il a la valeur g , sachant les valeurs de X au voisinage de \mathbf{x} . \mathcal{G} est l'ensemble des valeurs que peut prendre $X(\mathbf{x})$.

Dans le cadre de la segmentation, la classification L est une réalisation du champ X . Les sites sont naturellement les pixels de l'image et V est un voisinage de pixels (en connexité 4, par exemple). Dans le cas d'une segmentation en N_R régions, l'ensemble des étiquettes possibles d'un pixel est $\mathcal{G} = \{1, \dots, N_R\}$. L'étiquetage des pixels $L(\mathbf{x})$ est modélisé par un champ de Markov aléatoire gaussien (GMRF), d'après les travaux présentés dans [MSC90; MC91]. La fonction d'énergie pour un site \mathbf{x} donné s'écrit alors :

$$U_{\mathbf{x}}(L(\mathbf{x})) = \frac{(I(\mathbf{x}) - \mu_k)^2}{2\sigma_k^2} + \ln \sqrt{2\pi\sigma_k} + \beta \sum_{\mathbf{y} \in V(\mathbf{x})} |L(\mathbf{x}) - L(\mathbf{y})| \quad (2.153)$$

où μ_k et σ_k sont la moyenne et l'écart-type des intensités de la région k . Nous sommes dans le cadre d'une segmentation supervisée. Le coefficient β pondère le terme de régularisation, qui est d'autant plus élevé que les pixels voisins ont une classe différente de celle de \mathbf{x} .

La classification des pixels est régularisée par l'algorithme des modes conditionnels itérés, qui consiste à mettre à jour la classe des pixels de façon à maximiser la probabilité *a posteriori* de réalisation de la classification. Autrement dit, les pixels se voient affectés itérativement la classe qui minimise leur énergie :

$$\begin{aligned} L^{(t+1)}(\mathbf{x}) &= \underset{l}{\operatorname{argmax}} P(L(\mathbf{x}) = l | I(\mathbf{x}), V(\mathbf{x})) \\ &= \underset{l}{\operatorname{argmin}} U_{\mathbf{x}}(l) \\ &= \underset{l}{\operatorname{argmin}} \frac{(I(\mathbf{x}) - \mu_l)^2}{2\sigma_l^2} + \ln \sqrt{2\pi\sigma_l} + \beta \sum_{\mathbf{y} \in V(\mathbf{x})} |l - L(\mathbf{y})| \end{aligned} \quad (2.154)$$

L'énergie de région finalement utilisée est

$$E_{\text{région}}(\Gamma) = - \iint_{R_{in}} I_r(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (2.155)$$

où I_r est une combinaison de la fonction d'intensité I et de la classification L obtenues précédemment. Le contour Γ utilisé par Chakraborty *et al* est une représentation de Fourier [SD92] déformée par la méthode du gradient conjugué.

2.3.3 Discussion

Les différentes méthodes de représentation et d'évolution sont exclusives. Lorsque l'on conçoit une méthode de segmentation, il est nécessaire d'effectuer un choix sur la représentation et l'évolution. A l'inverse, les différents termes d'attache aux données ne sont pas incompatibles entre eux et peuvent cohabiter dans la même fonctionnelle d'énergie, à condition que la combinaison soit pertinente. Les énergies externes ne doivent pas être contradictoires ni redondantes. Dans cette optique, un terme basé contour peut être utilisé conjointement avec un terme basé région. On combine ainsi les caractéristiques locales sur les frontières et les caractéristiques globales sur les domaines, comme dans [CSD96] et [JBU04].

Parmi les énergies de type contour, certaines sont basées sur le principe de diffusion. C'est le cas du GVF et de la carte de distance, qui permettent ainsi au modèle déformable d'être initialisé loin des frontières recherchées. Les autres énergies, comme les détecteurs de contours de Zucker-Hummel et Monga-Deriché ainsi que les tenseurs de structures, conservent la localité des contours. Nous considérons que ces dernières sont plus à même d'être combinées avec des termes basé région. En effet, le GVF et la carte de distance créent un champ d'attraction qui a tendance à pousser le contour ou la surface vers les bords les plus proches. Les énergies de région ont un effet similaire, dans la mesure où elles permettent au contour ou à la surface de se mouvoir sans être proche de frontières, mais l'orientation du mouvement est guidée par le critère région. Par conséquent, les déplacements induits par l'énergie de région et les énergies de contour diffuses peuvent être contradictoires, c'est pourquoi nous privilégions les énergies de contour sans diffusion.

2.4 Choix du modèle déformable

La présentation de modèles déformables démontre qu'il existe dans ce domaine un vaste panel de représentations, de méthodes d'évolution et de types d'attache aux données présentes dans l'image. Le choix de la méthode d'implémentation du modèle déformable

n'est pas anodin. Il doit être fait en fonction des caractéristiques souhaitées : généralité, robustesse, facilité d'implémentation, etc. Le choix d'une structure particulière de contour ou de surface influe sur l'espace des formes représentables. Avec un modèle ayant de fortes contraintes, tant au niveau de la représentation que de l'évolution, l'ensemble des formes représentables sera plus restreint qu'avec un modèle générique. Un choix de modèle déformable doit également être dicté par l'application visée, par le type d'images en entrée et les caractéristiques des régions d'intérêts à segmenter.

Parmi les différents modes de représentation, les modèles explicites discrets et les ensembles de niveaux nous semblent les plus appropriés pour le développement d'une méthode générique de segmentation 2D et 3D. Les changements de topologie n'étant pas une priorité dans le cadre de nos travaux, nous privilégions par la suite les modèles explicites, comme les contours polygonaux et les maillages. Ces modèles constituent le socle des travaux présentés dans ce manuscrit. Les ensembles de niveaux sont également étudiés, à titre de comparaison. Parmi les méthodes d'évolution applicables aux modèles discrets, l'algorithme glouton et l'approche physique sont adéquats, car ils fournissent un mécanisme de déformation général tout en permettant l'ajout de contraintes au moyen d'énergies ou de forces supplémentaires. Enfin, les termes d'attache aux données de type contour et région sont complémentaires. Leur utilisation simultanée est *a priori* un choix pertinent pour l'adéquation du modèle aux données présentes dans l'image.

Chapitre 3

Modèles déformables explicites 2D et 3D

Les modèles déformables présentés au chapitre précédent ont des capacités propres inhérentes à leur mode de représentation et d'évolution. Ils ont une aptitude plus ou moins forte à décrire des formes complexes et à accepter l'ajout de connaissances dans leur évolution. Nous souhaitons disposer d'une méthode ayant les propriétés suivantes :

- Le modèle déformable doit être flexible d'un point de vue géométrique. Il doit donc être capable de segmenter des structures de formes complexes.
- La méthode doit autoriser l'adjonction de contraintes dans son évolution. Sa représentation doit permettre par exemple de le forcer à conserver une forme en particulier.
- L'évolution du modèle ne doit pas entraîner de temps de calculs prohibitifs, particulièrement en segmentation tridimensionnelle, où le volume de données peut devenir très important.

Les contours et surfaces discrets et les modèles implicites basés sur les ensembles de niveaux sont des modèles possédant une géométrie très souple, dans la mesure où ils peuvent représenter des formes variées. Un avantage des ensembles de niveaux est la gestion naturelle des changements de topologie. En effet, pour les contours et maillages, des mécanismes de détection de changement de topologie doivent être mis en place [LM99], et ce indépendamment de la méthode d'évolution. Ces changements doivent être implémentés en marge de la méthode de déformation, alors qu'ils sont partie intégrante de l'évolution des ensembles de niveaux. L'inconvénient majeur des ensembles de niveaux est leur coût de calcul élevé, malgré les méthodes d'accélération existantes [AS95; PD00]. Ceci est d'autant plus vrai lorsque la résolution augmente, car leur complexité algorithmique est directement fonction de la taille de l'image. Dans le cas où le temps de calcul est crucial, les implémentations explicites sont plus adéquates. Par ailleurs, les changements de topologie ne sont pas une priorité dans le cadre de nos travaux. De plus, les modèles explicites nous

semblent plus propices à l'ajout de contraintes. En effet, comme la surface est directement manipulée, ses déformations sont plus facilement contrôlables.

Dans ce chapitre, nous présentons deux modèles déformables explicites reposant sur des représentations discrètes. Le premier est un contour actif discrétisé en une courbe polygonale pour la segmentation 2D. Le second est une surface active implémentée en un maillage triangulaire dédié à la segmentation d'images 3D. Ces modèles permettent de définir localement la forme en chaque sommet. Bien que ces deux modèles soient différents de par la dimension des espaces dans lesquels ils évoluent, nous les décrivons à l'aide d'un formalisme unifié. Ainsi, notre modèle de surface active peut être considéré comme une extension naturelle de notre contour actif. Les deux modèles utilisent une approche énergétique : la segmentation est réalisée par minimisation d'une énergie, associée au contour ou à la surface. Cette énergie se décompose en termes internes assurant la régularisation géométrique et en termes externes permettant l'ajustement du modèle aux données de l'image. Les modèles présentés ici sont basés contour, car ils sont mis en relation avec l'image au moyen d'un terme de gradient (un terme de région original est introduit au chapitre 5). Afin de minimiser l'énergie, nous utilisons l'algorithme glouton, qui a l'avantage de ne pas nécessiter de schéma complexe de dérivation que l'on rencontre dans les approches variationnelles. De plus, l'algorithme glouton est par nature discret et se prête donc bien à la déformation de modèles discrets. Pour assurer la flexibilité géométrique et l'indépendance vis à vis de l'initialisation, nous introduisons une méthode de reparamétrisation en accord avec l'algorithme glouton. Les méthodes présentées dans ce chapitre ont été publiées dans [MBMC06a] et [MBMC06b].

3.1 Modèle de contour actif

Nous décrivons dans cette section le modèle dédié à la segmentation 2D. Dans un premier temps, nous développons le modèle continu du point de vue de sa représentation puis de sa fonctionnelle d'énergie. L'implémentation discrète du contour et de ses énergies est ensuite présentée. Enfin, nous décrivons la méthode de reparamétrisation.

3.1.1 Modèle continu

Notre contour actif 2D est représenté de manière continue par une courbe paramétrée Γ de vecteur position \mathbf{c} et de paramètre u :

$$\begin{aligned} \Gamma & : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ u & \longmapsto \mathbf{c}(u) = (x(u), y(u))^T \end{aligned} \tag{3.1}$$

où x et y sont continûment dérivables par rapport à u . Le domaine de définition du paramètre u est normalisé : $\Omega = [0, 1]$. La courbe Γ est simple, dans la mesure où elle ne présente pas d'auto-intersection, et fermée : $\mathbf{c}(0) = \mathbf{c}(1)$.

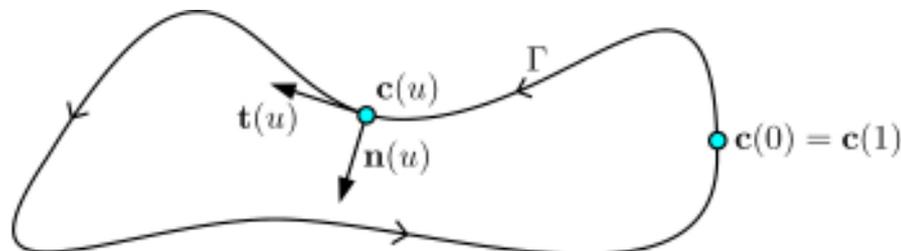


FIG. 3.1 – Courbe fermée avec normale et tangente au point $\mathbf{c}(u)$

Nous définissons ici plusieurs quantités différentielles de la courbe Γ qui interviennent dans son évolution. Citons par exemple le vecteur tangent $\mathbf{t}(u)$, le vecteur normal $\mathbf{n}(u)$ et la courbure $\kappa(u)$. En admettant que x et y sont p fois dérivables par rapport à u , la dérivée d'ordre p de \mathbf{c} est le vecteur colonne

$$\frac{d^p \mathbf{c}}{du^p} = \begin{pmatrix} d^p x & d^p y \\ du^p & du^p \end{pmatrix}^T$$

L'élément de longueur, parfois appelé vitesse lorsque u est assimilé au temps, est la norme de la dérivée première du vecteur position :

$$\left\| \frac{d\mathbf{c}}{du} \right\| = \sqrt{\left(\frac{dx}{du} \right)^2 + \left(\frac{dy}{du} \right)^2} \quad (3.2)$$

L'élément de longueur permet d'exprimer l'abscisse curviligne s , longueur parcourue en suivant la courbe de $\mathbf{c}(0)$ jusqu'à $\mathbf{c}(u)$:

$$s(u) = \int_0^u \left\| \frac{d\mathbf{c}(t)}{dt} \right\| dt \quad (3.3)$$

L'abscisse curviligne s'exprime également de façon différentielle :

$$\begin{aligned} \frac{ds}{du} &= \left\| \frac{d\mathbf{c}}{du} \right\| \\ ds &= \sqrt{dx^2 + dy^2} \end{aligned} \quad (3.4)$$

où ds est la longueur infinitésimale. La longueur totale de la courbe Γ est l'abscisse curviligne au point $\mathbf{c}(1)$:

$$L(\Gamma) = \int_{\Gamma} ds = \int_{\Omega} \left\| \frac{d\mathbf{c}}{du} \right\| du \quad (3.5)$$

L'aire de la région intérieure R_{in} délimitée par Γ est

$$\mathcal{A}(\Gamma) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} x \frac{dy}{du} - y \frac{dx}{du} du \quad (3.6)$$

Cette formule provient du théorème de Green-Riemann, dont l'application sera détaillée au chapitre 5. Le vecteur tangent au point $\mathbf{c}(u)$, de norme unitaire, s'écrit :

$$\mathbf{t}(u) = \frac{\frac{d\mathbf{c}}{du}}{\left\| \frac{d\mathbf{c}}{du} \right\|} = \frac{\left(\frac{dx}{du}, \frac{dy}{du} \right)^T}{\left\| \frac{d\mathbf{c}}{du} \right\|} \quad (3.7)$$

Le contour est orienté de façon anti-horaire si son intérieur se trouve à gauche lorsqu'on se déplace sur la courbe selon un u croissant. Dans ce cas, la normale unitaire $\mathbf{n}(u)$, définie comme suit, pointe vers l'intérieur de la courbe :

$$\mathbf{n}(u) = \frac{\left(-\frac{dy}{du}, \frac{dx}{du} \right)^T}{\left\| \frac{d\mathbf{c}}{du} \right\|} \quad (3.8)$$

La courbure est une quantité algébrique qui désigne la vitesse à laquelle les vecteurs normaux et tangents "tournent" par rapport à une direction fixe. Un cercle a une courbure constante positive, tandis qu'une ligne droite a une courbure nulle. Notée $\kappa(u)$, elle est définie en tout point de la courbe et s'exprime par :

$$\kappa(u) = \frac{\frac{dx}{du} \frac{d^2y}{du^2} - \frac{dy}{du} \frac{d^2x}{du^2}}{\left(\left(\frac{dx}{du} \right)^2 + \left(\frac{dy}{du} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \quad (3.9)$$

Dans [JBU04], il est démontré que $\kappa^2(u)$ se réduit à

$$\kappa^2(u) = \frac{\left\| \frac{d^2\mathbf{c}}{du^2} \right\|^2}{c^4} = \frac{\left(\frac{d^2x}{du^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2y}{du^2} \right)^2}{c^4} \quad (3.10)$$

lorsque l'élément de longueur est constant :

$$\left\| \frac{d\mathbf{c}}{du} \right\| = c \quad (3.11)$$

Comme il est expliqué un peu plus loin, la notion de courbure joue un rôle prépondérant dans la régularisation du contour.

3.1.2 Energie

Au contour Γ , nous associons la fonctionnelle d'énergie suivante :

$$\begin{aligned} E(\Gamma) &= \omega_{\text{continuité}} E_{\text{continuité}}(\Gamma) + \omega_{\text{courbure}} E_{\text{courbure}}(\Gamma) \\ &+ \omega_{\text{gradient}} E_{\text{gradient}}(\Gamma) + \omega_{\text{ballon}} E_{\text{ballon}}(\Gamma) \end{aligned} \quad (3.12)$$

La segmentation d'une ou plusieurs structures d'intérêt dans l'image est formulée comme un problème d'optimisation. Le contour Γ^* qui segmente l'image de façon optimale est celui qui minimise l'énergie E :

$$\Gamma^* = \underset{\Gamma}{\operatorname{argmin}} E(\Gamma) \quad (3.13)$$

L'énergie du contour est composée de quatre termes : continuité, courbure, gradient et ballon. Avant de les présenter de manière détaillée, nous pouvons distinguer les énergies internes $E_{\text{continuité}}$ et E_{courbure} , dont le rôle est de maintenir la régularité géométrique du contour, et les énergies externes E_{gradient} et E_{ballon} , qui ont pour but de mettre en relation le modèle avec les données présentes dans l'image.

Les poids ω contrôlent l'importance relative accordée à chaque énergie. Les poids $\omega_{\text{continuité}}$ et ω_{courbure} sont respectivement l'élasticité et la rigidité du contour. Plus leurs valeurs sont faibles, plus le contour est autorisé à se distendre et se courber. Dans une certaine mesure, les poids traduisent la connaissance *a priori* dont dispose l'utilisateur sur la forme de l'objet. Dans le modèle initial de Kass *et al* [KWT88], les poids sont fonction du paramètre u , de sorte que le contour peut ne pas avoir les mêmes propriétés d'élasticité et de rigidité selon l'endroit où l'on se situe. Ici, les caractéristiques mécaniques du contour sont uniformes, car les poids ω ne dépendent pas de u .

Energie de continuité

De manière générale, un terme de régularisation fait intervenir les dérivées du vecteur position par rapport à u . L'énergie de continuité est le terme régularisant de premier ordre :

$$E_{\text{continuité}}(\Gamma) = \int_{\Omega} \left\| \frac{d\mathbf{c}}{du} \right\|^2 du \quad (3.14)$$

L'énergie de continuité fait se comporter le contour comme une membrane, dans la mesure où elle s'oppose à la tension du contour. Elle s'apparente à la longueur de la courbe. Sous l'effet de sa minimisation, le contour a tendance à se rétracter. Lorsqu'il est minimal (et donc nul), le contour est assimilé à un unique point.

Energie de courbure

L'énergie de courbure est le terme régularisant de second ordre et fait se comporter le contour comme une coque mince, qui l'empêche de se courber :

$$E_{\text{courbure}}(\Gamma) = \int_{\Omega} \left\| \frac{d^2\mathbf{c}}{du^2} \right\|^2 du \quad (3.15)$$

La minimisation du terme de courbure a pour effet de lisser le contour, dans la mesure où ce terme s'oppose aux fortes variations de direction de \mathbf{c} . Ce phénomène de lissage est illustré

sur la figure 3.2. La courbe fermée minimisant la courbure globale est un cercle, tandis que la courbe ouverte est une droite. En un point $\mathbf{c}(u)$, quelles que soient les variations de l'élément de longueur, on a :

$$\left\| \frac{d^2 \mathbf{c}}{du^2} \right\| = 0 \Rightarrow \kappa(u) = 0 \quad (3.16)$$

On notera que les énergies internes sont indépendantes de la position relative du contour dans l'image. Elles sont invariantes par rotation et translation de la courbe.

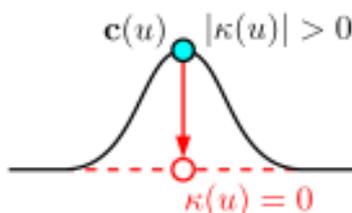


FIG. 3.2 – La minimisation de la courbure tend à rendre le contour localement rectiligne

Energie de gradient

Le modèle de segmentation que nous décrivons ici est basé contour, car son potentiel externe est uniquement composé d'un terme de gradient. A ce stade, nous utilisons uniquement l'information de gradient pour mettre en relation le modèle et l'image. Nous souhaitons que les points de la courbe se localisent sur les pixels où la fonction image I varie fortement. Nous maximisons donc la norme du gradient des points de la courbe. L'énergie de gradient s'écrit donc :

$$E_{\text{gradient}}(\Gamma) = - \int_{\Omega} \|\nabla I(\mathbf{c}(u))\| du \quad (3.17)$$

Energie ballon

Quels que soient les poids affectés aux énergies précédemment décrites, le contour ne peut que se rétracter, et ceci à vitesse réduite. La segmentation d'un objet par initialisation autour du contour est possible mais nécessite un grand nombre d'itérations. A l'inverse, une évolution dans le sens opposé est impossible : le contour ne peut se dilater à moins d'être initialisé proche des frontières à segmenter. Sans énergie supplémentaire, le modèle est incapable de capturer les structures images éloignées. La force ballon proposée par Cohen [Coh91; CC93] permet de remédier à cette limitation, en propageant la courbe dans sa direction normale. Nous adaptons cette force au modèle énergétique en utilisant l'aire délimitée par le contour. Nous choisissons d'exprimer E_{ballon} de façon à ce qu'un poids

ω_{ballon} positif entraîne une diminution de l'aire délimitée par le contour :

$$\begin{aligned} E_{\text{ballon}}(\Gamma) &= \mathcal{A}(\Gamma) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} x(u) \frac{dy}{du} - y(u) \frac{dx}{du} du \end{aligned} \quad (3.18)$$

A l'inverse, un poids ω_{ballon} négatif permettra une dilatation du contour. L'aire délimitée par la courbe Γ minimisant $\omega_{\text{ballon}} E_{\text{ballon}}(\Gamma)$ est nulle pour $\omega_{\text{ballon}} > 0$ et infinie pour $\omega_{\text{ballon}} < 0$. Il est à noter que parmi les pondérations des énergies, ω_{ballon} est la seule à pouvoir être négative.

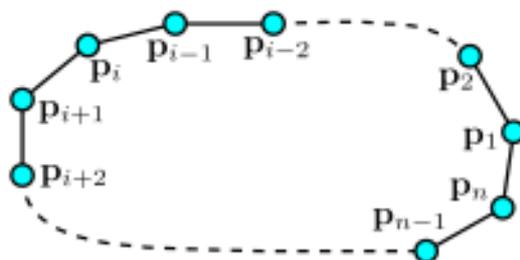
3.1.3 Implémentation

Parmi les implémentations explicites présentées au chapitre précédent, nous avons opté pour une courbe polygonale, qui peut représenter des formes de géométrie arbitraire. En effet, le polygone ne présente aucune restriction quant à la géométrie de la structure représentée. Le modèle de courbe polygonale initialement développé par Kass *et al* [KWT88] présente l'inconvénient d'avoir un nombre de sommets fixe. Le polygone initial doit avoir une aire proche de celle de la forme recherchée, sous peine de ne pouvoir décrire le contour de façon suffisamment précise. Les modèles polygonaux traditionnels sont donc relativement figés d'un point de vue géométrique. Les modèles basés sur des B-splines [MSMM90] remédient au problème de paramétrisation, car ils peuvent décrire des formes lisses d'aire variable avec peu de points de contrôle. Cependant, l'implémentation des énergies y est moins naturelle. Nous développons ici un modèle basé sur un polygone muni d'un mécanisme de rééchantillonnage, permettant de s'affranchir du manque d'adaptation géométrique des contours actifs classiques.

Polygone

Le modèle de contour actif discret est composé de n sommets, notés $\mathbf{p}_i = (p_{x_i}, p_{y_i})^T \in \mathbb{R}^2$, $\forall i, 1 \leq i \leq n$. Dans la littérature, les sommets sont également appelés points de contrôle ou *snaxel* (*snake element*). Un sommet \mathbf{p}_i est relié aux deux sommets voisins \mathbf{p}_{i-1} et \mathbf{p}_{i+1} , comme illustré en figure 3.3. La relation de voisinage est directement indiquée par l'indice, ce qui n'est pas le cas dans le modèle 3D décrit plus loin. Pour le polygone décrivant une courbe fermée, les indices des sommets doivent être considérés modulo n . Ainsi, \mathbf{p}_1 est voisin de \mathbf{p}_2 et \mathbf{p}_n , tandis que \mathbf{p}_n est voisin de \mathbf{p}_{n-1} et \mathbf{p}_1 .

Le polygone échantillonne régulièrement la courbe, dans la mesure où le sommet \mathbf{p}_i est

FIG. 3.3 – Discrétisation du contour Γ en un polygone

la discrétisation du point de la courbe en $\frac{i-1}{n}$:

$$\mathbf{p}_i = \begin{pmatrix} p_{xi} \\ p_{yi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \left(\frac{i-1}{n} \right) \\ y \left(\frac{i-1}{n} \right) \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

Discrétisation des quantités différentielles

Pour permettre la minimisation de l'énergie du contour par une méthode numérique, les quantités différentielles décrites précédemment, comme l'élément de longueur ou la normale, doivent être discrétisées. Si on considère la définition des dérivées de \mathbf{c} :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{c}}{du} &= \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\mathbf{c}(u) - \mathbf{c}(u - \Delta u)}{\Delta u} \\ \frac{d^2\mathbf{c}}{du^2} &= \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\mathbf{c}(u + \Delta u) - 2\mathbf{c}(u) + \mathbf{c}(u - \Delta u)}{\Delta u^2}, \end{aligned} \quad (3.20)$$

en utilisant les différences finies en arrière avec $\Delta u = 1$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{c}}{du} &\approx \mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{i-1} \\ \frac{d^2\mathbf{c}}{du^2} &\approx \mathbf{p}_{i-1} - 2\mathbf{p}_i + \mathbf{p}_{i+1} \end{aligned} \quad (3.21)$$

Le périmètre et l'aire de la courbe polygonale sont les discrétisations respectives des équations 3.5 et 3.6 :

$$\begin{aligned} L(\Gamma) &= \sum_{i=1}^n \|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{i-1}\| \\ \mathcal{A}(\Gamma) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n p_{xi}(p_{yi} - p_{yi-1}) - p_{yi}(p_{xi} - p_{xi-1}) \end{aligned} \quad (3.22)$$

où $\|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{i-1}\|$ est la distance euclidienne entre deux sommets successifs, discrétisation de l'élément de longueur. Le vecteur tangent unitaire $\mathbf{t}_i = (t_{xi}, t_{yi})^T$ est discrétisé par différence finie centrée :

$$\mathbf{t}_i = \frac{\mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{p}_{i-1}}{\|\mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{p}_{i-1}\|} \quad (3.23)$$

Contrairement au schéma arrière, le schéma centré évite un biais éventuel introduit par le sens de parcours des sommets. La normale unitaire est orthogonale à la tangente. Si les sommets sont ordonnés dans le sens anti-horaire (comme sur la figure 3.3), la normale intérieure \mathbf{n}_i est :

$$\mathbf{n}_i = (-t_{y_i}, t_{x_i})^T \quad (3.24)$$

Minimisation de l'énergie

La segmentation est réalisée par déplacement itératif de la courbe polygonale jusqu'à stabilisation sur les frontières de l'objet désiré. A chaque étape, les sommets sont déplacés dans la direction qui minimise localement l'énergie E . L'algorithme glouton [SLY06; WS92] décrit au chapitre précédent est la méthode d'évolution que nous avons choisie pour effectuer cette minimisation. Dans la modélisation continue, l'énergie totale du contour est exprimée comme une somme pondérée d'énergies de nature différente, chaque énergie représentant une caractéristique du contour. Ici, pour permettre la minimisation par l'algorithme glouton, l'énergie totale du contour est la somme des énergies des sommets :

$$E(\Gamma) = \sum_{i=1}^n E(\mathbf{p}_i) \quad (3.25)$$

Les énergies présentées dans la section précédente sont discrétisées et distribuées à chaque sommet. Ainsi, on ne parle plus d'énergie de courbure du contour Γ mais d'énergie de courbure d'un sommet en particulier. Il en va de même pour les autres énergies. L'énergie associée au sommet \mathbf{p}_i s'écrit :

$$\begin{aligned} E(\mathbf{p}_i) &= \omega_{\text{continuité}} E_{\text{continuité}}(\mathbf{p}_i) + \omega_{\text{courbure}} E_{\text{courbure}}(\mathbf{p}_i) \\ &+ \omega_{\text{gradient}} E_{\text{gradient}}(\mathbf{p}_i) + \omega_{\text{ballon}} E_{\text{ballon}}(\mathbf{p}_i) \end{aligned} \quad (3.26)$$

Avant de décrire précisément les expressions des énergies discrètes, nous formalisons le schéma d'évolution des sommets. A chaque itération de l'algorithme glouton et pour chaque sommet \mathbf{p}_i , l'énergie $E(\mathbf{p}_i)$ est calculée à chaque position $\tilde{\mathbf{p}}_i$ appartenant à une fenêtre W . \mathbf{p}_i est ensuite déplacé à la position qui donne l'énergie minimale, ce qui est résumé par le schéma d'évolution suivant, à l'itération t :

$$\mathbf{p}_i^{(t+1)} = \underset{\tilde{\mathbf{p}}_i \in W(\mathbf{p}_i)}{\operatorname{argmin}} E(\tilde{\mathbf{p}}_i^{(t)}) \quad (3.27)$$

La fenêtre associée au sommet \mathbf{p}_i , notée $W(\mathbf{p}_i)$, est un voisinage carré de largeur w :

$$W(\mathbf{p}_i) = \{\mathbf{p}_i + \mathbf{r} \mid \mathbf{r} \in \llbracket -\lfloor w/2 \rfloor, \lfloor w/2 \rfloor \rrbracket^2\} \quad (3.28)$$

où $\llbracket \dots \rrbracket$ est une intervalle d'entiers et $\lfloor \dots \rfloor$ est l'arrondi à l'entier inférieur. La largeur w est toujours un entier naturel impair supérieur ou égal à 3, de façon à ce que \mathbf{p}_i occupe le voxel central de la fenêtre. Le choix de w est un compromis entre la vitesse de convergence du

contour actif et le temps de calcul. Lorsque w est grand, le contour actif nécessitera moins d'itérations pour atteindre les frontières. Cependant, chaque itération sera plus coûteuse qu'avec un w petit, car la taille de l'espace de recherche augmente de manière non-linéaire par rapport à w :

$$\text{card}(W) = w^2$$

Energie de continuité

L'application directe des différences finies à l'équation 3.14, conformément à l'équation 3.21, conduit à l'énergie de continuité locale suivante :

$$E_{\text{continuité}}(\mathbf{p}_i) = \|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{i-1}\|^2 \quad (3.29)$$

Cette énergie étant minimale lorsque $\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_{i-1}$, elle a tendance à faire se rétracter la courbe. La minimisation de l'énergie de continuité seule aurait pour effet de réduire le polygone à un point unique. Pour éviter ce phénomène, Williams et Shah [WS92] proposent d'utiliser l'énergie suivante :

$$E_{\text{continuité}}(\mathbf{p}_i) = \left| \bar{d} - \|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{i-1}\| \right| \quad (3.30)$$

où \bar{d} est la distance moyenne entre sommets consécutifs :

$$\bar{d} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{i-1}\| \quad (3.31)$$

Ainsi, la minimisation de l'énergie de continuité uniformise l'échantillonnage du contour. Elle réduit l'écart-type des distances euclidiennes entre sommets consécutifs. Cependant, cette formulation a l'inconvénient d'être unilatérale : à part \mathbf{p}_i , l'énergie $E_{\text{continuité}}(\mathbf{p}_i)$ ne fait intervenir qu'un seul voisin, d'indice $i-1$. Ceci peut introduire un biais dans l'évolution du contour selon le sens dans lequel les sommets sont considérés. Pour éviter de privilégier un sens de parcours plutôt qu'un autre, nous introduisons une énergie de continuité bilatérale qui considère les deux voisins. Nous utilisons la distance quadratique pour nous rapprocher de la formulation continue de l'équation 3.14 :

$$E_{\text{continuité}}(\tilde{\mathbf{p}}_i) = \frac{1}{2} \left(\left| \bar{d}^2 - \|\tilde{\mathbf{p}}_i - \mathbf{p}_{i-1}\|^2 \right| + \left| \bar{d}^2 - \|\tilde{\mathbf{p}}_i - \mathbf{p}_{i+1}\|^2 \right| \right) \quad (3.32)$$

D'autre part, les distances quadratiques ont l'avantage de ne pas nécessiter le calcul d'une racine carrée, opération relativement coûteuse en temps de calcul. La quantité \bar{d}^2 est la distance quadratique moyenne. Elle n'a besoin d'être calculée qu'une fois avant le déplacement des sommets :

$$\bar{d}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{i-1}\|^2 \quad (3.33)$$

Sur la figure 3.4 (gauche), les positions qui minimisent l'énergie de continuité du sommet \mathbf{p}_i sont situées à une distance \bar{d} de \mathbf{p}_{i-1} et \mathbf{p}_{i+1} .

Energie de courbure

L'énergie de courbure dépend de l'approximation par différences finies de la dérivée seconde du vecteur position. Nous nous ramenons à une distance quadratique :

$$\begin{aligned} \left\| \frac{d^2 \mathbf{c}}{du^2} \right\|^2 &\approx \left\| \mathbf{p}_{i-1} - 2\mathbf{p}_i + \mathbf{p}_{i+1} \right\|^2 \\ &\approx \left\| 2 \left(\frac{\mathbf{p}_{i-1} + \mathbf{p}_{i+1}}{2} - \mathbf{p}_i \right) \right\|^2 \\ &\approx 4 \left\| \mathbf{p}_i - \frac{\mathbf{p}_{i-1} + \mathbf{p}_{i+1}}{2} \right\|^2 \end{aligned} \quad (3.34)$$

Ainsi, à une constante près, l'énergie de courbure d'un sommet \mathbf{p}_i est la distance quadratique qui le sépare du barycentre de ses deux voisins, comme illustré en figure 3.4 (droite). La constante n'ayant pas d'incidence de par l'utilisation du coefficient de pondération ω_{courbure} , nous écrivons donc :

$$E_{\text{courbure}}(\tilde{\mathbf{p}}_i) = \left\| \tilde{\mathbf{p}}_i - \frac{\mathbf{p}_{i-1} + \mathbf{p}_{i+1}}{2} \right\|^2 \quad (3.35)$$



FIG. 3.4 – Minimisation de $E_{\text{continuité}}$ (gauche) et E_{courbure} (droite). Les positions qui minimisent $E_{\text{continuité}}$ sont les intersections des cercles, tandis que celle qui minimise E_{courbure} est le barycentre des voisins

Energie de gradient

L'énergie de gradient est le terme externe de notre approche. Afin de lier les sommets aux zones de fortes variations de l'image I , nous choisissons E_{gradient} comme l'opposé de l'amplitude du gradient :

$$E_{\text{gradient}}(\tilde{\mathbf{p}}_i) = - \left\| \hat{\nabla} I(\tilde{\mathbf{p}}_i) \right\| \quad (3.36)$$

où $\hat{\nabla}$ est un gradient estimé par interpolation. Nous ne calculons pas l'amplitude $\|\nabla I\|$ à l'aide des différences finies mais par convolution de l'image avec le filtre de Sobel, qui génère des contours plus marqués et mieux localisés. Il est composé de deux masques 3×3 , S_x et S_y , qui détectent les contours dans les directions respectives x et y :

$$S_x = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad S_y = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

L'amplitude du gradient est calculée comme suit :

$$\begin{aligned} \|\nabla I\| &= \sqrt{(I * S_x)^2 + (I * S_y)^2} \\ &\approx |I * S_x| + |I * S_y| \end{aligned} \quad (3.38)$$

où $*$ est l'opérateur de convolution. Les coordonnées des sommets sont réelles. Plutôt que de tronquer les coordonnées aux entiers inférieurs, nous utilisons l'interpolation bilinéaire pour approximer la norme du gradient à un point quelconque $\mathbf{x} = (x, y)$ de l'image. Les pixels autour de \mathbf{x} , de coordonnées entières, sont calculés par arrondi aux entiers inférieurs et supérieurs :

$$\begin{aligned} x_0 = \lfloor x \rfloor \quad y_0 = \lfloor y \rfloor \quad x_1 = \lceil x \rceil \quad y_1 = \lceil y \rceil \\ \Delta x = x - x_0 \quad \Delta y = y - y_0 \end{aligned} \quad (3.39)$$

L'interpolation bilinéaire donne :

$$\begin{aligned} \left\| \hat{\nabla} I(x, y) \right\| &\approx (1 - \Delta x)(1 - \Delta y) \|\nabla I(x_0, y_0)\| + \Delta x(1 - \Delta y) \|\nabla I(x_1, y_0)\| \\ &+ (1 - \Delta x)\Delta y \|\nabla I(x_0, y_1)\| + \Delta x\Delta y \|\nabla I(x_1, y_1)\| \end{aligned} \quad (3.40)$$

Pour des raisons de performance, le calcul du gradient par filtrage de Sobel est effectué avant toute déformation du contour actif. L'interpolation $\left\| \hat{\nabla} I(\tilde{\mathbf{p}}_i) \right\|$ est la seule quantité relative à l'image réellement calculée pendant la déformation du contour.

Energie ballon

Conformément à l'équation 3.18, nous implémentons l'énergie ballon de sorte qu'elle soit minimale lorsque \mathbf{p}_i se déplace en direction de sa normale intérieure \mathbf{n}_i . Nous l'exprimons comme la distance quadratique entre la position testée $\tilde{\mathbf{p}}_i$ et un point suffisamment éloigné de \mathbf{p}_i dans sa direction normale :

$$E_{\text{ballon}}(\tilde{\mathbf{p}}_i) = \|\tilde{\mathbf{p}}_i - (\mathbf{p}_i + w\mathbf{n}_i)\|^2 \quad (3.41)$$

En utilisant le facteur w , nous nous assurons que l'extrémité $\mathbf{p}_i + w\mathbf{n}_i$ se trouve hors de la fenêtre de recherche $W(\mathbf{p}_i)$. Le signe du coefficient de pondération de l'énergie ballon ω_{ballon} contrôle l'orientation du mouvement ballon et doit être initialisé en fonction de la position de départ du contour par rapport à l'objet. Si les sommets sont placés à l'extérieur de l'objet, ω_{ballon} devra être positif pour que la surface puisse se rétracter et inversement.

3.1.4 Rééchantillonnage du contour

Afin de maintenir une distribution homogène des sommets quelles que soient les déformations subies par le contour, un rééchantillonnage périodique est effectué après chaque itération de l'algorithme glouton, lorsque tous les sommets ont été déplacés. Des sommets peuvent être créés ou supprimés de façon à conserver une distance homogène entre

les sommets voisins. Nous présentons tout d'abord l'approche général du rééchantillonnage puis sa version dédiée à notre modèle de contour actif. Le rééchantillonnage garantit que la condition suivante soit vérifiée pour tous les sommets :

$$d_{min} \leq \|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{i+1}\| \leq d_{max} \quad (3.42)$$

où d_{min} et d_{max} sont deux bornes choisies par l'utilisateur. La relation qui les lie est définie de façon à éviter un comportement oscillatoire, qui consisterait à supprimer un sommet venant d'être créé ou inversement. Pour cela, les bornes de distances doivent vérifier $d_{max} \geq 2d_{min}$.

Plutôt que de rééchantillonner totalement le contour, nous considérons le polygone comme une liste dynamique dans laquelle les sommets peuvent être librement insérés et supprimés à n'importe quelle position. Lorsque $\|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{i+1}\| > d_{max}$, un nouveau sommet est inséré au milieu du segment $[\mathbf{p}_i\mathbf{p}_{i+1}]$. A l'inverse, lorsque $\|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{i+1}\| < d_{min}$, \mathbf{p}_i est translaté au milieu du segment $[\mathbf{p}_i\mathbf{p}_{i+1}]$, puis \mathbf{p}_{i+1} est supprimé de la liste des sommets. Une méthode de rééchantillonnage similaire est utilisée dans [LV95].

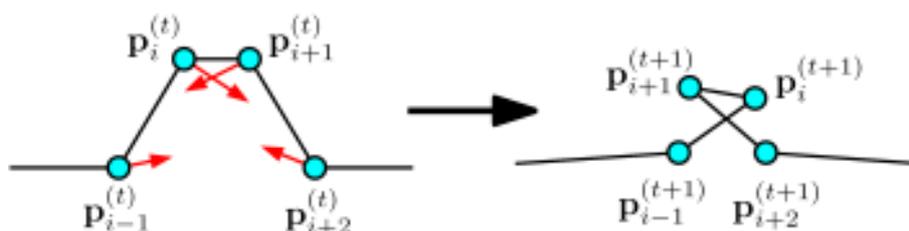


FIG. 3.5 – Sans mécanisme de fusion, les intersections d'arêtes peuvent survenir

La création de sommets permet au contour de garder un échantillonnage suffisant lorsqu'il se dilate. A l'inverse, la fusion a pour rôle d'empêcher les sommets voisins d'être trop proches, ce qui risquerait de causer des intersections du contour, comme illustré en figure 3.5. Lorsque l'algorithme glouton est utilisé avec des fenêtres carrées, deux voisins \mathbf{p}_i et \mathbf{p}_{i+1} risquent de générer des intersections d'arête à l'itération $t + 1$ seulement si leurs fenêtres respectives se superposent à l'itération t . Très simplement, deux carrés de largeur w ne se superposent pas si leurs centres sont au moins distants de w pixels dans les directions x et/ou y . En utilisant la norme infinie $\|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{i+1}\|_\infty$, nous pouvons formaliser ce principe et ainsi redéfinir le critère de reparamétrisation de l'équation 3.42.

$$w \leq \|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{i+1}\|_\infty \leq 2w \quad (3.43)$$

Ainsi, le paramètre w contrôle non seulement la largeur de l'espace de recherche de l'algorithme glouton, mais aussi l'échantillonnage du contour (le contour sera d'autant plus dense que w est petit). Le mécanisme de création de sommet avec séparation d'arête est explicité en figure 3.6, tandis que la figure 3.7 illustre la fusion de sommet. Pour mettre en évidence le principe de recouvrement des fenêtres, les déplacements des sommets sont arbitraires. L'évolution du modèle de contour actif est réalisée par alternance des phases de minimisation de l'énergie et de rééchantillonnage.

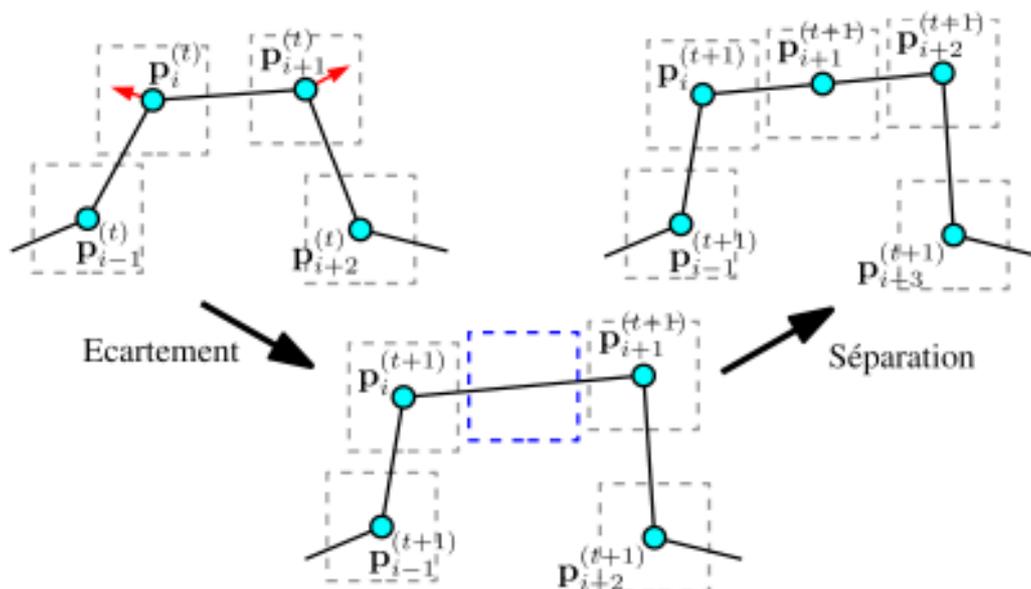


FIG. 3.6 – A l’itération $t + 1$, les sommets \mathbf{p}_i et \mathbf{p}_{i+1} sont suffisamment éloignés pour qu’un carré de largeur w puisse être inséré sans recouvrement. Il y a donc séparation.

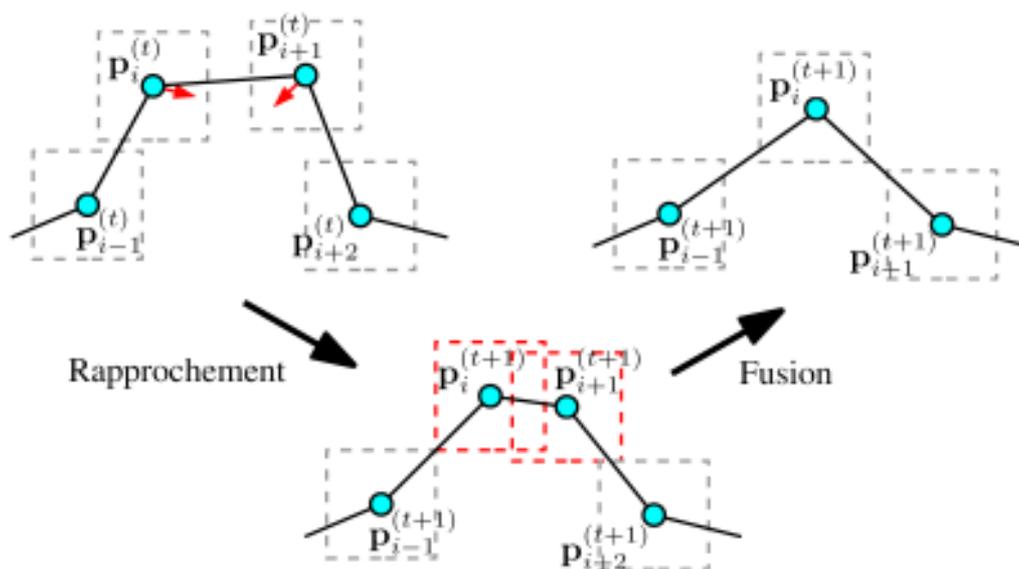


FIG. 3.7 – A l’itération $t + 1$, les fenêtres des sommets \mathbf{p}_i et \mathbf{p}_{i+1} se superposent. Il y a donc fusion.

3.1.5 Normalisation des énergies

Les énergies discrètes ont chacune une plage de variation qui leur est propre. Pour que les poids associés aux énergies aient le même ordre de grandeur, il convient de normaliser les

énergies. Dans la méthode gloutonne initiale de Williams et Shah [WS92], il est préconisé d'effectuer une normalisation locale dans la fenêtre. Chaque énergie est normalisée selon les valeurs minimale et maximale rencontrées dans la fenêtre, de sorte que l'énergie résultante est comprise entre 0 et 1. L'inconvénient de cette approche est que les valeurs des énergies des positions testées $\tilde{\mathbf{p}}_i$ auront une signification différente selon la position centrale du sommet. Ce principe est illustré à la figure 3.8. Si les énergies sont normalisées localement, l'énergie de courbure de $\tilde{\mathbf{p}}_i$ va prendre les mêmes valeurs dans les deux cas, alors que la courbure de la première situation est beaucoup plus élevée.

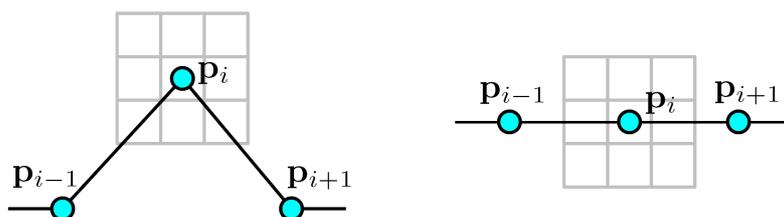


FIG. 3.8 – Si la normalisation est locale à la fenêtre, l'énergie de courbure prend les mêmes valeurs alors que la courbure réelle est plus élevée dans le premier cas

Par ailleurs, dans des approches décrites au chapitre suivant, la fenêtre de recherche va être amenée à subir des modifications au fur et à mesure de l'évolution. Nous souhaitons que les énergies reflètent réellement la situation d'un sommet et que leurs valeurs soient indépendantes de la fenêtre. Pour cela, nous introduisons une approche globale, qui normalise par un maximum théorique plutôt que par le maximum rencontré dans la fenêtre. Ainsi, dans l'équation d'évolution 3.27, l'énergie d'une position testée $\tilde{\mathbf{p}}_i$ est en fait calculée comme suit :

$$\begin{aligned}
 E(\tilde{\mathbf{p}}_i) &= \frac{\omega_{\text{continuité}}}{m_{\text{continuité}}} E_{\text{continuité}}(\tilde{\mathbf{p}}_i) + \frac{\omega_{\text{courbure}}}{m_{\text{courbure}}} E_{\text{courbure}}(\tilde{\mathbf{p}}_i) \\
 &+ \frac{\omega_{\text{gradient}}}{m_{\text{gradient}}} E_{\text{gradient}}(\tilde{\mathbf{p}}_i) + \frac{\omega_{\text{ballon}}}{m_{\text{ballon}}} E_{\text{ballon}}(\tilde{\mathbf{p}}_i)
 \end{aligned} \tag{3.44}$$

où les coefficients m sont les maxima théoriques des énergies. Nous donnons ici leurs expressions, fixes et dépendantes uniquement de la largeur de la fenêtre de recherche w . On notera par ailleurs que le minimum théorique de toutes les énergies est 0. Le critère de rééchantillonnage énoncé précédemment permet de borner la distance euclidienne entre les sommets voisins :

$$w \leq \|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{i+1}\|_{\infty} \leq 2w \quad \Rightarrow \quad w \leq \|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{i+1}\| \leq 2w\sqrt{2}$$

En d'autres termes, \mathbf{p}_i et \mathbf{p}_{i+1} sont le plus éloignés possible lorsque \mathbf{p}_{i+1} est situé en un coin du carré de centre \mathbf{p}_i et de largeur $2w$. On obtient ainsi un encadrement de la longueur moyenne des arêtes :

$$w \leq \bar{d} \leq 2w\sqrt{2}$$

Pour normaliser l'énergie de continuité, nous calculons le maximum théorique de l'écart entre $\overline{d^2}$ et la longueur des arêtes :

$$\sup_{w \leq \overline{d} \leq 2\sqrt{2}w, w \leq d \leq 2\sqrt{2}w} \left| \overline{d^2} - d^2 \right| = \left| w^2 - (2w\sqrt{2})^2 \right| = 7w^2$$

D'après l'équation 3.32, nous avons $m_{\text{continuité}} = 7w^2$. La courbure maximale apparaît lorsque \mathbf{p}_{i-1} et \mathbf{p}_{i+1} sont confondus en un coin du carré de centre \mathbf{p}_i et de largeur $2w$. On a alors :

$$\left\| \mathbf{p}_i - \frac{\mathbf{p}_{i-1} + \mathbf{p}_{i+1}}{2} \right\| = 2w\sqrt{2}$$

Le maximum théorique de l'énergie de courbure d'un sommet est donc :

$$m_{\text{courbure}} = (2w\sqrt{2})^2 = 8w^2$$

La norme du gradient est stockée sur une image 8 bits, on a donc $m_{\text{gradient}} = 255$. Le maximum de l'énergie ballon advient lorsque $\tilde{\mathbf{p}}_i$ est à l'opposé de la normale. Le vecteur $w\mathbf{n}_i$ pointe dans la direction d'un coin du carré de centre \mathbf{p}_i tandis que $\tilde{\mathbf{p}}_i$ est situé au coin opposé. On a alors :

$$m_{\text{ballon}} = \left(w + \frac{w\sqrt{2}}{2} \right)^2 = \frac{w^2(3 + 2\sqrt{2})}{2}$$

Ainsi, nous garantissons une indépendance de l'ordre de grandeur des énergies quelle que soit la fenêtre de recherche.

3.2 Modèle de surface active

3.2.1 Modèle continu

Notre modèle déformable 3D est représenté par une surface paramétrée Γ de vecteur position \mathbf{s} et de paramètres spatiaux (u, v) .

$$\begin{aligned} \Gamma &: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto \mathbf{s}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))^T \end{aligned} \tag{3.45}$$

Le domaine de définition des paramètres (u, v) est normalisé : $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$. Les fonctions coordonnées x , y et z sont continûment dérivables par rapport à u et v .

Certaines propriétés des surfaces peuvent être décrites à l'aide de notions de topologie. Un espace topologique est un ensemble de points muni d'une topologie. Deux espaces topologiques E_1 et E_2 sont dits homéomorphes si et seulement s'il existe une bijection $h : E_1 \rightarrow E_2$ continue avec h^{-1} continue. De manière intuitive, E_1 et E_2 sont homéomorphes

s'ils ont la même forme à une déformation élastique près. La surface Γ est une variété sans bord de dimension 2 si et seulement si tout point de Γ admet un voisinage homéomorphe à un disque. Les conditions suivantes impliquent une surface fermée, donc sans bord :

$$\begin{aligned} \mathbf{s}(0, v) &= \mathbf{s}(1, v) \quad \forall v \in [0, 1] \\ \mathbf{s}(u, 0) &= \mathbf{s}(u, 1) \quad \forall u \in [0, 1] \end{aligned} \quad (3.46)$$

Les surfaces homéomorphes à la sphère ou au tore sont des variétés sans bord, tandis que celles homéomorphes au plan ou au cylindre sont des variétés avec bord. De plus, une variété sans bord est orientable si elle ne présente pas d'auto-intersection et qu'elle possède un intérieur et un extérieur. La bouteille de Klein et le ruban de Mœbius sont des exemples de surfaces non-orientables. Par ailleurs, le genre de la surface désigne le nombre de trous topologiques. Ainsi, la sphère est de genre nul tandis que le tore est de genre 1. Par la suite, nous considérons la surface continue Γ comme une variété sans bord orientable de genre quelconque. Nous présentons ici les diverses caractéristiques rencontrées en géométrie

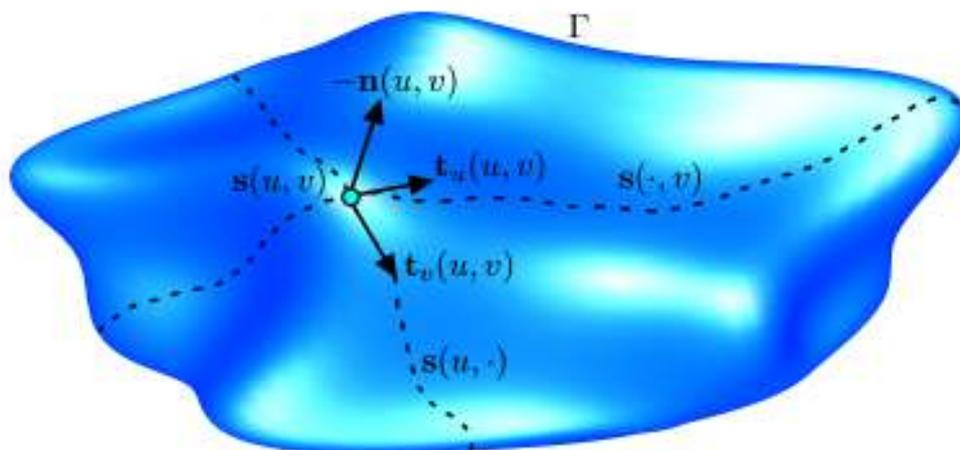


FIG. 3.9 – Surface continue Γ avec tangentes et normale extérieure au point $\mathbf{s}(u, v)$

différentielle [dC76] qui sont utilisées dans l'évolution de la surface active. L'élément de surface au point $\mathbf{s}(u, v)$ est :

$$a(u, v) = \left\| \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial v} \right\| \quad (3.47)$$

Pour rappel, nous détaillons le calcul du produit vectoriel de $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ et $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$:

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} \quad (3.48)$$

L'aire totale de la surface est obtenue en intégrant les éléments de surface sur Ω :

$$\mathcal{A}(\Gamma) = \iint_{\Omega} \left\| \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial v} \right\| du dv \quad (3.49)$$

Un point $\mathbf{s}(u, v)$ possède une infinité de directions tangentes. Les dérivées partielles du vecteur position par rapport aux paramètres en font partie :

$$\mathbf{t}_u(u, v) = \frac{\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial u}}{\left\| \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial u} \right\|} \quad \mathbf{t}_v(u, v) = \frac{\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial v} \right\|} \quad (3.50)$$

Sur la figure 3.9, $\mathbf{s}(u, \cdot)$ et $\mathbf{s}(\cdot, v)$ sont des chemins sur la surface Γ . $\mathbf{s}(\cdot, v)$ est obtenue par variation de u avec v fixé, et inversement pour $\mathbf{s}(u, \cdot)$. Les vecteurs \mathbf{t}_u et \mathbf{t}_v sont respectivement tangents à $\mathbf{s}(\cdot, v)$ et $\mathbf{s}(u, \cdot)$. Ces deux vecteurs définissent le plan tangent à la surface au point $\mathbf{s}(u, v)$. La normale unitaire est :

$$\mathbf{n}(u, v) = \frac{\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial v} \right\|} \quad (3.51)$$

Naturellement, la normale est orthogonale aux tangentes : $\mathbf{n} \cdot \mathbf{t}_u = \mathbf{n} \cdot \mathbf{t}_v = 0$. Le volume délimité par la surface se calcule de la façon suivante :

$$\mathcal{V}(\Gamma) = \iint_{\Omega} \mathbf{s}(u, v) \cdot \mathbf{n}(u, v) \left\| \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial v} \right\| dudv \quad (3.52)$$

Cette formule provient du théorème de flux-divergence, que nous détaillerons au chapitre 5. Dans la section précédente, la notion de courbure a été présentée afin d'introduire la régularisation du contour 2D. Sur une surface de l'espace, il existe de nombreuses courbures : normale, principale, gaussienne, moyenne, etc. Cependant, pour la régularisation de la surface, nous n'utilisons pas la courbure, c'est pourquoi les différents types de courbures spatiales et les relations qui les lient seront présentées au chapitre 5.

3.2.2 Energie

La segmentation de structures d'intérêts 3D présentes dans l'image volumique I est effectuée en déterminant la surface optimale Γ^* qui minimise la fonctionnelle d'énergie E :

$$\begin{aligned} E(\Gamma) &= \omega_{\text{continuité}} E_{\text{continuité}}(\Gamma) + \omega_{\text{courbure}} E_{\text{courbure}}(\Gamma) \\ &+ \omega_{\text{gradient}} E_{\text{gradient}}(\Gamma) + \omega_{\text{ballon}} E_{\text{ballon}}(\Gamma) \end{aligned} \quad (3.53)$$

Les énergies présentées ici sont les extensions surfaciques des énergies du contour 2D. Les paramètres ω pondèrent les énergies de manière équivalente à l'approche 2D. Alors que les énergies de gradient et de ballon sont formulées quasiment de la même manière que pour le modèle 2D, les énergies internes requièrent plus d'attention, notamment dans la combinaison des dérivées partielles de \mathbf{s} .

Energie de continuité

Le terme de régularisation du premier ordre s'oppose à l'expansion élastique de la surface. Nous l'exprimons comme :

$$E_{\text{continuité}}(\Gamma) = \iint_{\Omega} \left\| \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial u} \right\|^2 + \left\| \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial v} \right\|^2 dudv \quad (3.54)$$

On notera que minimiser la quantité précédente en un point $\mathbf{s}(u, v)$ entraîne la minimisation de l'élément de surface :

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial u} \right\|^2 + \left\| \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial v} \right\|^2 = 0 \Rightarrow \left\| \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial v} \right\| = 0 \quad (3.55)$$

La minimisation de l'énergie de continuité a pour effet principal de rétracter la surface. Cette énergie est nulle lorsque la surface est confondue en un seul point.

Energie de courbure

Notre terme de régularisation du second ordre est basé sur le laplacien ∇^2 du vecteur position :

$$\nabla^2 \mathbf{s} = \frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial v^2} \quad (3.56)$$

Au point $\mathbf{s}(u, v)$, la norme du laplacien mesure la distance entre $\mathbf{s}(u, v)$ et la position moyenne de son voisinage. Nous exprimons l'énergie de courbure surfacique comme suit :

$$E_{\text{courbure}}(\Gamma) = \iint_{\Omega} \left\| \frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial v^2} \right\|^2 dudv \quad (3.57)$$

Sa minimisation a pour effet de lisser la surface, en atténuant les rugosités locales. Le laplacien a l'avantage d'être une quantité différentielle pouvant être facilement approximée sur le type de surface discrète que nous utilisons (il s'agit du maillage triangulaire, comme décrit plus loin). Outre le fait d'être calculable sur un maillage, le laplacien nous permet d'établir une équivalence entre les formulations discrètes des énergies de courbure 2D et 3D.

Energie de gradient

L'énergie de gradient pousse les points de la surface à se localiser sur les zones susceptibles d'être des frontières. Nous maximisons l'amplitude du gradient :

$$E_{\text{gradient}}(\Gamma) = - \iint_{\Omega} \|\nabla I(\mathbf{s}(u, v))\| dudv, \quad (3.58)$$

le gradient provenant de la dérivation de I dans les directions x , y et z .

Energie ballon

Nous avons exprimé l'énergie ballon 2D comme étant l'aire délimitée par le contour. Par extension, l'énergie ballon de la surface est son volume :

$$E_{\text{ballon}}(\Gamma) = \iint_{\Omega} \mathbf{s}(u, v) \cdot \mathbf{n}(u, v) \left\| \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial v} \right\| du dv \quad (3.59)$$

Le poids ω_{ballon} peut être négatif pour permettre une expansion de la surface.

3.2.3 Maillage triangulaire

La surface continue Γ est discrétisée en maillage triangulaire (présenté à la section 2.1.2), également appelé surface triangulée ou simplement triangulation. Nous présentons ici le maillage à l'aide d'un formalisme proche de celui de la courbe polygonale. Le maillage est composé d'un ensemble de n sommets $\mathbf{p}_i = (p_{xi}, p_{yi}, p_{zi})^T \in \mathbb{R}^3, \forall i, 1 \leq i \leq n$ qui constituent les données géométriques de la structure 3D. Les sommets sont les échantillons discrets des points de surface $\mathbf{s}(u, v)$. Le maillage est également constitué d'un ensemble d'arêtes reliant les sommets entre eux et qui constituent donc les données topologiques de la surface. Les sommets et les arêtes forment un ensemble de triangles adjacents, conformément au voisinage représenté en figure 3.10 (gauche). On remarquera que, contrairement au modèle 2D, l'indice i n'est pas l'équivalent discret du ou des paramètres spatiaux. Il ne traduit donc aucunement l'agencement des sommets sur la surface.

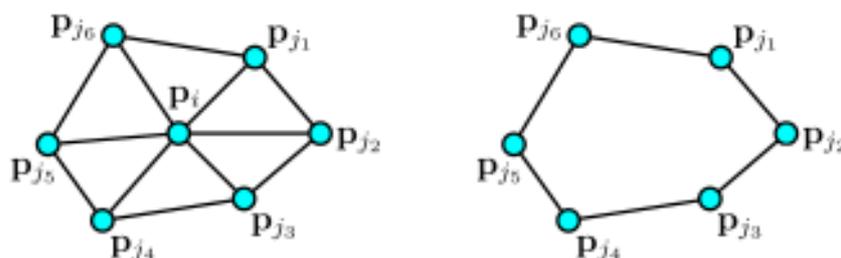


FIG. 3.10 – Voisinage topologique d'un sommet : le sous-graphe composé des sommets du voisinage de \mathbf{p}_i est un cycle

Le maillage vérifie les propriétés topologiques énoncées lors de la description de la surface continue. C'est une variété sans bord, car chaque arête est adjacente à exactement deux

triangles. S'il existe une arête adjacente à un seul triangle, le maillage est alors une variété avec bord. C'est le cas par exemple d'un maillage discrétisant une surface homéomorphe à un cylindre. Nous considérons que notre maillage est un polyèdre, une variété fermée (sans bord) et orientable, dans la mesure où il sépare l'espace en deux domaines distincts : un intérieur et un extérieur.

Nous notons V_i le voisinage de \mathbf{p}_i , soit l'ensemble des sommets connectés à \mathbf{p}_i par des arêtes. De plus, F_i désigne l'ensemble des indices des triangles adjacents au sommet \mathbf{p}_i . Sur un polyèdre, tout sommet possède autant de triangles voisins que de sommets voisins :

$$\text{card}(V_i) = \text{card}(F_i) \quad \forall i, 1 \leq i \leq n \quad (3.60)$$

Les ensembles voisins sont implémentés comme des listes dans lesquelles l'ordre des indices traduit la relation de voisinage. Ainsi, les sommets sont ordonnés dans le sens horaire ou anti-horaire. Considérons le sommet \mathbf{p}_i de la figure 3.10. Les listes suivantes sont des exemples de voisinage valide :

$$[j_1, j_2, j_3, j_4, j_5, j_6]$$

$$[j_3, j_4, j_5, j_6, j_1, j_2]$$

$$[j_4, j_3, j_2, j_1, j_6, j_5]$$

Par ailleurs, les listes de triangles voisins sont alignées sur les listes de sommets voisins. Nous choisissons comme convention que le $k^{\text{ième}}$ triangle voisin du sommet \mathbf{p}_i est composé des $k^{\text{ième}}$ et $k + 1^{\text{ième}}$ voisins de \mathbf{p}_i et de \mathbf{p}_i lui-même :

$$F_i[k] = (\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_{V_i[k]}, \mathbf{p}_{V_i[k+1]})$$

Le maillage permet une approximation des quantités différentielles décrites pour la surface continue. Le vecteur \mathbf{n}_i est la normale unitaire intérieure à la surface, définie au sommet \mathbf{p}_i . Elle est exprimée comme la moyenne des normales des triangles voisins de \mathbf{p}_i . On peut trouver un calcul similaire dans [CM95]. Par abus de langage, la normale d'un triangle désigne le vecteur unitaire orthogonal au plan auquel appartient le triangle. Un vecteur normal est déterminé par le produit vectoriel normalisé de deux vecteurs de ce plan. Ainsi, la normale du $t^{\text{ième}}$ triangle, notée \mathbf{m}_t , est calculée comme suit :

$$\mathbf{m}_t = \frac{(\mathbf{p}_{t_2} - \mathbf{p}_{t_1}) \wedge (\mathbf{p}_{t_3} - \mathbf{p}_{t_1})}{\|(\mathbf{p}_{t_2} - \mathbf{p}_{t_1}) \wedge (\mathbf{p}_{t_3} - \mathbf{p}_{t_1})\|} \quad (3.61)$$

où $\mathbf{p}_{t_j}, j = 1 \dots 3$ sont les sommets du triangle t (\mathbf{p}_i est obligatoirement l'un d'eux). Dans un triangle, il convient que les sommets soient ordonnées de façon à ce que le produit vectoriel pointe systématiquement vers l'intérieur de la surface. La normale du sommet \mathbf{p}_i est donc :

$$\mathbf{n}_i = \frac{\sum_{t \in F_i} \mathbf{m}_t}{\left\| \sum_{t \in F_i} \mathbf{m}_t \right\|} \quad (3.62)$$

3.2.4 Construction du maillage initial

La méthode de segmentation par surface active nécessite une initialisation du maillage. Nous devons construire une structure initiale contenant les sommets et les arêtes convenablement agencés. Nous choisissons comme structure initiale un polyèdre décrivant une sphère, une variété sans bord de genre nul. Alors qu'il est aisé d'initialiser le contour 2D en un cercle de centre et de rayon donné, créer une sphère discrète est moins naturel. En effet, contrairement à un maillage quadrangulaire, le maillage triangulaire ne permet pas une discrétisation directe de l'équation paramétrique d'une sphère. Nous construisons le maillage triangulaire initial par subdivisions successives d'un icosaèdre, un polyèdre régulier comportant 12 sommets et 20 faces (figure 3.12 à gauche). Le principe de subdivision, qui est décrit de façon détaillée dans [Ahl96], est utilisé dans la même optique dans [MT95a; Xu99]. Une subdivision consiste à casser chaque triangle en quatre triangles plus petits, en ajoutant de nouveaux sommets et arêtes, comme illustré sur la figure 3.11. Un nouveau sommet est ajouté au milieu de chaque arête et est projeté sur la sphère circonscrite au polyèdre. En construisant de cette façon une sphère discrétisée, nous garantissons une répartition égale des sommets le long de la surface. Ainsi, le maillage initial est homogène d'un point de vue géométrique et topologique. Les douze sommets initiaux ont cinq voisins, tandis que les nouveaux en ont six.

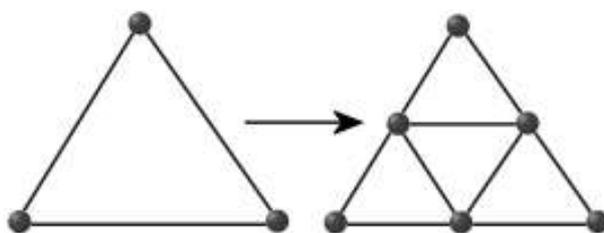


FIG. 3.11 – Séparation d'un triangle

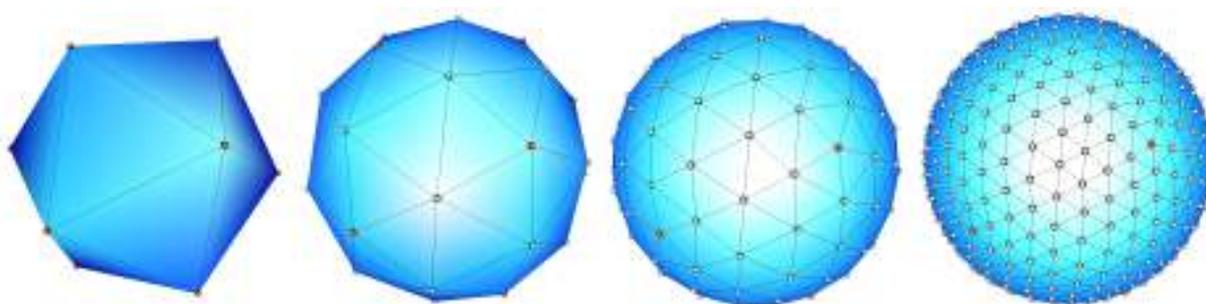


FIG. 3.12 – L'icosaèdre (gauche) et les trois polyèdres obtenus par subdivisions successives. Les sommets en rouge sont les sommets initiaux

Si on note f le nombre de faces, a le nombre d'arêtes et n le nombre de sommets, la

caractéristique d'Euler du polyèdre est :

$$n - a + f = 2 \quad (3.63)$$

A noter que l'on parle également de caractéristique d'Euler-Poincaré. Nous notons p l'ordre de subdivision du polyèdre, ce qui signifie que le polyèdre d'ordre p est obtenu par subdivision des faces du polyèdre d'ordre $p - 1$, l'icosaèdre étant lui-même polyèdre d'ordre 0. On note $f^{(p)}$ le nombre de facettes triangulaires, $a^{(p)}$ le nombre d'arêtes et $n^{(p)}$ le nombre de sommets à l'ordre p . A l'ordre 0, nous avons $(f^{(0)}, a^{(0)}, n^{(0)}) = (20, 30, 12)$. Les caractéristiques du polyèdre d'ordre p peuvent être exprimées par les relations récursives suivantes :

$$\begin{aligned} f^{(p)} &= 4f^{(p-1)} \\ a^{(p)} &= 2a^{(p-1)} + 3f^{(p-1)} \\ n^{(p)} &= n^{(p-1)} + a^{(p-1)} \end{aligned} \quad (3.64)$$

Le nombre d'arêtes se développe :

$$\begin{aligned} a^{(p)} &= 2(2a^{(p-2)} + 3f^{(p-2)}) + 3f^{(p-1)} \\ &= 2(2(2a^{(p-3)} + 3f^{(p-3)}) + 3f^{(p-2)}) + 3f^{(p-1)} \end{aligned}$$

et ainsi de suite jusqu'au terme de rang 0. L'expression du nombre d'arêtes se simplifie en reconnaissant la somme des termes d'une suite géométrique :

$$\begin{aligned} a^{(p)} &= 2^p a^{(0)} + 3 \sum_{k=0}^{p-1} 2^{p-1-k} f^{(k)} \\ &= 2^p a^{(0)} + 3 \cdot 2^{p-1} \sum_{k=0}^{p-1} 2^{-k} \cdot 4^k f^{(0)} \\ &= 2^p a^{(0)} + 3 \cdot 2^{p-1} f^{(0)} \sum_{k=0}^{p-1} 2^k \\ &= 30 \cdot 4^p \end{aligned}$$

Le nombre de sommets se réécrit :

$$\begin{aligned} n^{(p)} &= n^{(0)} + \sum_{k=0}^{p-1} a^{(k)} \\ &= 12 + 30 \sum_{k=0}^{p-1} 4^k \\ &= 2 + 10 \cdot 4^p \end{aligned}$$

Finalement, les nombres de faces, d'arêtes et de sommets à l'ordre p sont exprimés en fonction de puissances de p :

$$\begin{aligned} f^{(p)} &= 20 \cdot 4^p \\ a^{(p)} &= 30 \cdot 4^p \\ n^{(p)} &= 2 + 10 \cdot 4^p \end{aligned} \quad (3.65)$$

3.2.5 Energies

La nature discrète du maillage permet une minimisation de l'énergie par l'algorithme glouton, par extension de l'implémentation sur le contour 2D. Le lecteur pourra trouver des implémentations de l'algorithme glouton sur des maillages triangulaires dans [BE96; ZB97] et simplexes dans [TM04]. L'énergie totale de la surface discrète est la somme des énergies des sommets :

$$E(\Gamma) = \sum_{i=1}^n E(\mathbf{p}_i) \quad (3.66)$$

L'énergie associée au sommet \mathbf{p}_i est :

$$\begin{aligned} E(\mathbf{p}_i) &= \omega_{\text{continuité}} E_{\text{continuité}}(\mathbf{p}_i) + \omega_{\text{courbure}} E_{\text{courbure}}(\mathbf{p}_i) \\ &+ \omega_{\text{gradient}} E_{\text{gradient}}(\mathbf{p}_i) + \omega_{\text{ballon}} E_{\text{ballon}}(\mathbf{p}_i) \end{aligned} \quad (3.67)$$

Pour chaque sommet \mathbf{p}_i , l'énergie est calculée à chaque position $\tilde{\mathbf{p}}_i$ appartenant à une fenêtre W . Cette fenêtre doit permettre au sommet de se déplacer dans les directions x , y et z . La fenêtre tridimensionnelle associée au sommet \mathbf{p}_i est un voisinage cubique de largeur w :

$$W(\mathbf{p}_i) = \{\mathbf{p}_i + \mathbf{r} \mid \mathbf{r} \in \llbracket -\lfloor w/2 \rfloor, \lfloor w/2 \rfloor \rrbracket^3\} \quad (3.68)$$

La largeur w de l'espace de recherche influe sur la vitesse de convergence du modèle déformable. Le coût calculatoire d'une itération augmente rapidement lorsque w augmente. Ceci est d'autant plus vrai en 3D :

$$\text{card}(W) = w^3$$

Energie de continuité

Le calcul des énergies internes est aisé sur la courbe polygonale. En effet, les dérivées du vecteur position sont directement discrétisables par différences finies. Cependant, la discrétisation des dérivées partielles de \mathbf{s} n'est pas évidente sur le maillage, car les éléments triangulaires ne permettent pas d'appliquer directement les différences finies. Pour permettre la régularisation du maillage, nous considérons les expressions discrètes des énergies de continuité et de courbure 2D et en dérivons leurs extensions 3D. Par ailleurs, les formulations discrètes des énergies 3D peuvent être validées sur un maillage quadrangulaire.

L'énergie de continuité du maillage est exprimée à partir de l'équation 3.32 plutôt que 3.54. La distance quadratique moyenne $\overline{d^2}$ entre sommets adjacents est calculée en parcourant chaque sommet et leur voisinage :

$$\overline{d^2} = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j \in V_i} H(j-i) \|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j\|^2}{\sum_{i=1}^n \sum_{j \in V_i} H(j-i)} \quad (3.69)$$

où l'échelon de Heaviside H est défini à l'équation 2.120. Le terme $H(j - i)$ traduit le fait que chaque paire de sommet n'est considérée qu'une seule fois. Si $i > j$, l'arête $[\mathbf{p}_i \mathbf{p}_j]$ a déjà été considérée, et la distance n'est alors pas prise en compte pour le calcul de la moyenne.

Minimiser l'énergie de continuité revient à réduire l'écart-type des distances, de sorte que la distance moyenne entre un sommet et ses voisins soit approximativement la même pour chaque sommet. Par conséquent, les sommets demeurent espacés de façon homogène le long de la surface.

$$E_{\text{continuité}}(\tilde{\mathbf{p}}_i) = \frac{1}{\text{card}(V_i)} \sum_{j \in V_i} \left| \overline{d^2} - \|\tilde{\mathbf{p}}_i - \mathbf{p}_j\|^2 \right| \quad (3.70)$$

Si l'on considère un maillage quadrangulaire (figure 3.13), les sommets sont plus naturellement indicés par deux entiers i et j , car nous sommes en présence d'une grille qui discrétise directement l'espace des paramètres (u, v) . Les sommets échantillonnent la surface selon un pas constant :

$$\mathbf{p}_{i,j} = \mathbf{s} \left(\frac{i-1}{n_u}, \frac{j-1}{n_v} \right)$$

où n_u et n_v sont les dimensions de la grille, selon u et v respectivement. Le nombre total de sommets est $n = n_u \times n_v$. Le voisinage topologique $V_{i,j}$ contient alors les couples d'indices suivants :

$$V_{i,j} = \{(i-1, j), (i+1, j), (i, j-1), (i, j+1)\}$$

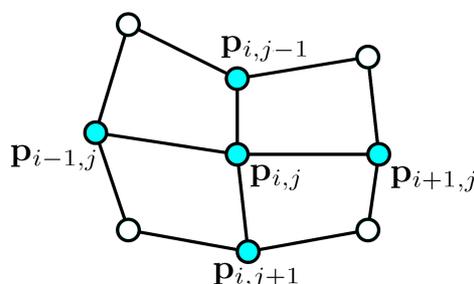


FIG. 3.13 – Voisinage dans un maillage quadrangulaire : $V_{i,j} = \{(i-1, j), (i+1, j), (i, j-1), (i, j+1)\}$

Le terme de distance quadratique de l'énergie de continuité contient les approximations par différences finies :

$$\begin{aligned} \sum_{(k,l) \in V_{i,j}} \|\mathbf{p}_{i,j} - \mathbf{p}_{k,l}\|^2 &= \|\mathbf{p}_{i,j} - \mathbf{p}_{i-1,j}\|^2 + \|\mathbf{p}_{i,j} - \mathbf{p}_{i+1,j}\|^2 \\ &+ \|\mathbf{p}_{i,j} - \mathbf{p}_{i,j-1}\|^2 + \|\mathbf{p}_{i,j} - \mathbf{p}_{i,j+1}\|^2 \end{aligned}$$

Les quantités vectorielles $\mathbf{p}_{i,j} - \mathbf{p}_{i-1,j}$ et $\mathbf{p}_{i+1,j} - \mathbf{p}_{i,j}$ sont les approximations par différences finies de la dérivée de surface selon u , respectivement en arrière et en avant. De même,

$\mathbf{p}_{i,j} - \mathbf{p}_{i,j-1}$ et $\mathbf{p}_{i,j+1} - \mathbf{p}_{i,j}$ sont les différences finies selon v , d'où :

$$\sum_{(k,l) \in V_{i,j}} \|\mathbf{p}_{i,j} - \mathbf{p}_{k,l}\|^2 \approx 2 \left\| \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial u} \right\|^2 + 2 \left\| \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial v} \right\|^2$$

A une constante près, on retrouve l'énergie de continuité du modèle continu décrite dans l'équation 3.54. L'équation 3.70 est une généralisation de cette approximation à un maillage qui n'est pas quadrangulaire.

Energie de courbure

Sur la courbe polygonale 2D, l'énergie de courbure d'un sommet est la distance quadratique qui le sépare du barycentre de ses deux voisins. Par extension de ce principe au maillage 3D, nous réécrivons cette énergie en prenant en compte l'ensemble du voisinage V_i :

$$E_{\text{courbure}}(\tilde{\mathbf{p}}_i) = \left\| \tilde{\mathbf{p}}_i - \frac{1}{\text{card}(V_i)} \sum_{j \in V_i} \mathbf{p}_j \right\|^2 \quad (3.71)$$

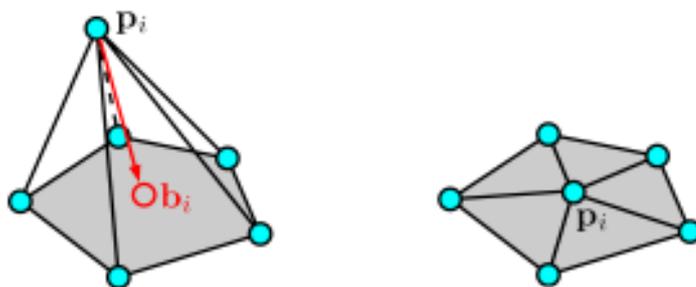
En considérant que les voisins sont situés régulièrement autour du sommet, le résultat est un effet de lissage de la surface. Sur la figure 3.14, les voisins de \mathbf{p}_i sont situés sur un même plan. La position de \mathbf{p}_i qui conduit à l'énergie de courbure minimale appartient à ce plan. La minimisation de E_{courbure} tend à rendre la structure du maillage localement plane. La formulation discrète de l'énergie de courbure se justifie de la même façon que celle de l'énergie de continuité. Si l'on considère le maillage quadrangulaire évoqué au paragraphe précédent, la distance au barycentre se développe en

$$\begin{aligned} \left\| \mathbf{p}_{i,j} - \frac{1}{\text{card}(V_{i,j})} \sum_{(k,l) \in V_{i,j}} \mathbf{p}_{k,l} \right\|^2 &= \left\| \mathbf{p}_{i,j} - \frac{1}{4} (\mathbf{p}_{i-1,j} + \mathbf{p}_{i+1,j} + \mathbf{p}_{i,j-1} + \mathbf{p}_{i,j+1}) \right\|^2 \\ &= \left\| \frac{1}{4} (-4\mathbf{p}_{i,j} + \mathbf{p}_{i-1,j} + \mathbf{p}_{i+1,j} + \mathbf{p}_{i,j-1} + \mathbf{p}_{i,j+1}) \right\|^2 \\ &= \frac{1}{2} \| (\mathbf{p}_{i+1,j} - 2\mathbf{p}_{i,j} + \mathbf{p}_{i-1,j}) + (\mathbf{p}_{i,j+1} - 2\mathbf{p}_{i,j} + \mathbf{p}_{i,j-1}) \|^2 \\ &\approx \frac{1}{2} \left\| \frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial v^2} \right\|^2 \end{aligned}$$

qui, à une constante près, est la norme quadratique du laplacien de \mathbf{s} :

$$\nabla^2 \mathbf{s} = \frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial v^2}$$

Ainsi, minimiser l'énergie de courbure revient à effectuer un lissage laplacien de la surface. Il est montré dans [DMSB99] que l'expression 3.71 est une approximation du laplacien sur les surfaces triangulées. Dans [TM04], une énergie semblable est appliquée sur un maillage simplexe en vue de sa régularisation.


 FIG. 3.14 – L'énergie de courbure rapproche un sommet \mathbf{p}_i du barycentre de ses voisins \mathbf{b}_i

Energie de gradient

L'énergie externe E_{gradient} doit attirer les sommets sur les voxels de frontières. L'information de frontière doit prendre en compte la variation de I dans les directions x , y et z . On a :

$$E_{\text{gradient}}(\tilde{\mathbf{p}}_i) = - \left\| \hat{\nabla} I(\tilde{\mathbf{p}}_i) \right\| \quad (3.72)$$

où $\hat{\nabla}$ est une estimation du gradient par interpolation. Pour le calcul de la norme du gradient, nous utilisons le filtre de Zucker-Hummel [ZH81], composé de trois masques $3 \times 3 \times 3$ ZH_x , ZH_y et ZH_z présentés en section 2.3.1. La convolution de l'image avec chacun de ces masques filtre les données dans une direction précise. L'opérateur de Zucker-Hummel génère des contours mieux localisés que ceux obtenus avec les différences finies. Il peut être vu comme l'extension tridimensionnelle du filtre de Sobel. Les masques ZH_y et ZH_z sont obtenus par rotation de ZH_x . L'amplitude du gradient est alors approchée comme suit :

$$\|\nabla I\| \approx |I * ZH_x| + |I * ZH_y| + |I * ZH_z| \quad (3.73)$$

Pour calculer $\|\nabla I\|$ en un point quelconque $\mathbf{x} = (x, y, z)^T$ de coordonnées réelles, on réalise une interpolation trilineaire sur les niveaux de gris :

$$\begin{aligned} x_0 &= \lfloor x \rfloor & y_0 &= \lfloor y \rfloor & z_0 &= \lfloor z \rfloor \\ x_1 &= \lceil x \rceil & y_1 &= \lceil y \rceil & z_1 &= \lceil z \rceil \\ \Delta x &= x - x_0 & \Delta y &= y - y_0 & \Delta z &= z - z_0 \end{aligned} \quad (3.74)$$

Le principe est illustré en figure 3.15. Le gradient au point \mathbf{x} est déterminé par moyenne pondérée des gradients des 8 sommets du cube $(x_0, y_0, z_0)^T$, $(x_0, y_0, z_1)^T$, ... L'expression complète de l'interpolation est

$$\begin{aligned} \left\| \hat{\nabla} I(x, y, z) \right\| &\approx (1 - \Delta x) (1 - \Delta y) (1 - \Delta z) \|\nabla I(x_0, y_0, z_0)\| \\ &+ \Delta x (1 - \Delta y) (1 - \Delta z) \|\nabla I(x_1, y_0, z_0)\| \\ &+ (1 - \Delta x) \Delta y (1 - \Delta z) \|\nabla I(x_0, y_1, z_0)\| \\ &+ (1 - \Delta x) (1 - \Delta y) \Delta z \|\nabla I(x_0, y_0, z_1)\| \\ &+ \Delta x \Delta y (1 - \Delta z) \|\nabla I(x_1, y_1, z_0)\| \\ &+ \Delta x (1 - \Delta y) \Delta z \|\nabla I(x_1, y_0, z_1)\| \\ &+ (1 - \Delta x) \Delta y \Delta z \|\nabla I(x_0, y_1, z_1)\| \\ &+ \Delta x \Delta y \Delta z \|\nabla I(x_1, y_1, z_1)\| \end{aligned} \quad (3.75)$$

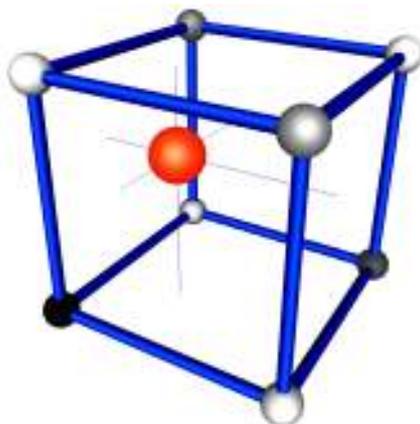


FIG. 3.15 – Interpolation trilinéaire pour approcher le gradient d'intensité du point central

Energie ballon

L'énergie ballon E_{ballon} encourage le déplacement des sommets le long de leur direction normale et peut être exprimée comme l'énergie ballon du contour 2D :

$$E_{\text{ballon}}(\tilde{\mathbf{p}}_i) = \|\tilde{\mathbf{p}}_i - (\mathbf{p}_i + w\mathbf{n}_i)\|^2 \quad (3.76)$$

Dans bon nombre d'applications en imagerie, le maillage est initialisé en une sphère à l'intérieur de la structure à segmenter. Il est alors nécessaire d'effectuer une expansion de la surface, d'où l'intérêt de l'énergie ballon muni d'un coefficient de pondération négatif.

3.2.6 Algorithme de remaillage

Au cours la déformation de la surface, nous effectuons des opérations de remaillage afin de maintenir un échantillonnage suffisamment précis de la surface. Ces opérations sont également abordées dans [HG93] ou [PMT01]. Les mécanismes de remaillage présentés ici sont des opérations dites Eulériennes [LM99], car elles ne modifient pas la caractéristique d'Euler du polyèdre (voir l'équation 3.63). En d'autres termes, le maillage ne change pas de topologie globale lors d'une opération de remaillage. Ce mécanisme a le même rôle que la reparamétrisation sur le contour 2D : la fusion des sommets trop proches pour éviter les auto-intersections de la surface et la création de sommets pour conserver une densité suffisante.

Les problèmes d'intersection d'arêtes survenant lors de la déformation du contour sont également susceptibles de se produire sur le maillage, si les sommets trop proches ne sont pas fusionnés. Trivialement, deux cubes de taille w ne se superposent pas si leurs centres sont au moins distants de w voxels dans l'une des trois dimensions. La longueur des arêtes est bornée en conséquence avec la norme infinie 3D :

$$\|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j\|_{\infty} = \max(|x_i - x_j|, |y_i - y_j|, |z_i - z_j|)$$

Le remaillage garantit que tout couple de voisins $(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j)$ satisfait la contrainte suivante :

$$w \leq \|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j\|_\infty \leq 2w \quad (3.77)$$

Si la contrainte est vérifiée, les fenêtres $W(\mathbf{p}_i)$ et $W(\mathbf{p}_j)$ intervenant dans l'algorithme glouton ne se superposent pas. Pour que l'ajout ou la fusion de sommets soient possibles, \mathbf{p}_i et \mathbf{p}_j doivent posséder exactement deux voisins en commun :

$$\text{card}(V_i \cap V_j) = 2 \quad (3.78)$$

Nous notons les deux voisins communs \mathbf{p}_a et \mathbf{p}_b , de sorte que $V_i \cap V_j = \{a, b\}$. Avant l'opération de remaillage, les sommets \mathbf{p}_a et \mathbf{p}_b sont tous deux adjacents à \mathbf{p}_i et \mathbf{p}_j (figure 3.16 à gauche). Ce cas de figure est le plus courant mais des configurations topologiques problématiques peuvent apparaître, c'est pourquoi la condition 3.78 est testée systématiquement. Lorsque la condition $\|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j\|_\infty \geq 2w$ est vérifiée, un nouveau sommet (d'indice $n + 1$) est créé au milieu du segment $[\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j]$ et connecté à \mathbf{p}_a et \mathbf{p}_b (figure 3.16 au milieu). La taille du voisinage n'est pas modifiée pour \mathbf{p}_i et \mathbf{p}_j , tandis que \mathbf{p}_a et \mathbf{p}_b gagnent un voisin chacun. A l'inverse, lorsque $\|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j\|_\infty < w$, \mathbf{p}_i est translaté au milieu du segment $[\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j]$ puis \mathbf{p}_j est supprimé de l'ensemble des sommets (figure 3.16 à droite). Les anciens voisins de \mathbf{p}_j deviennent voisins de \mathbf{p}_i .

La modification des voisinages peut se formaliser comme suit. Notons V^f et V^s les voisinages qui résultent respectivement des opérations de fusion et de séparation. Après la fusion de \mathbf{p}_i et \mathbf{p}_j , nous avons :

$$\begin{aligned} V_i^f &= (V_i \cup V_j) \setminus \{i, j\} \\ V_j^f &= \emptyset \\ V_a^f &= V_a \setminus \{j\} \\ V_b^f &= V_b \setminus \{j\} \end{aligned}$$

Après leur séparation, nous avons :

$$\begin{aligned} V_i^s &= V_i \setminus \{j\} \cup \{n + 1\} \\ V_j^s &= V_j \setminus \{i\} \cup \{n + 1\} \\ V_a^s &= V_a \cup \{n + 1\} \\ V_b^s &= V_b \cup \{n + 1\} \\ V_{n+1}^s &= \{i, j, a, b\} \end{aligned}$$

La figure 3.17 illustre le cas où la contrainte de l'équation 3.78 n'est pas vérifiée car les sommets \mathbf{p}_i and \mathbf{p}_j partagent trois voisins \mathbf{p}_a , \mathbf{p}_b et \mathbf{p}_c . Dans un tel cas, la création ou la fusion de sommets mènerait à une topologie locale incorrecte et violerait la condition selon laquelle le maillage est une variété.

3.2.7 Normalisation des énergies

Comme celles du contour, les énergies du maillages sont normalisées conformément à l'équation 3.44. Nous donnons ici leurs coefficients de normalisation globale. Grâce au

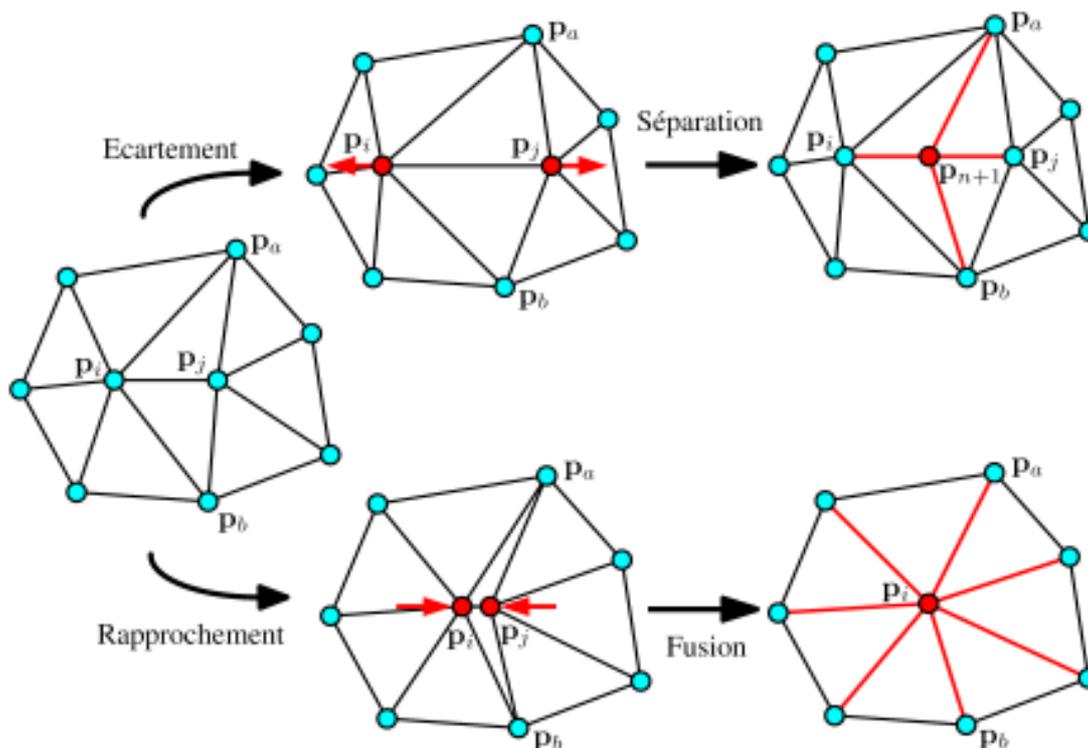


FIG. 3.16 – Opérations de remaillage entre les sommets \mathbf{p}_i et \mathbf{p}_j : séparation d'arête avec création de sommet (haut) et fusion de deux sommets (bas)

critère de remaillage, la longueur maximale théorique des arêtes est donnée par :

$$w \leq \|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j\|_\infty \leq 2w \quad \Rightarrow \quad w \leq \|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j\| \leq 2w\sqrt{3}$$

La longueur de l'arête $[\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j]$ est maximale lorsque \mathbf{p}_j est situé en un coin du cube de centre \mathbf{p}_i et de largeur $2w$. La longueur moyenne \bar{d} est donc bornée par :

$$w \leq \bar{d} \leq 2w\sqrt{3}$$

Pour normaliser l'énergie de continuité, nous calculons le maximum théorique de l'écart entre \bar{d}^2 et la longueur des arêtes :

$$\sup_{w \leq \bar{d} \leq 2w\sqrt{3}, w \leq d \leq 2w\sqrt{3}} \left| \bar{d}^2 - d^2 \right| = \left| w^2 - (2w\sqrt{3})^2 \right| = 11w^2$$

Dans le maillage, le coefficient $m_{\text{continuité}}$ dépend alors du nombre de voisins du sommet considéré. Etant donnée la méthode de construction du maillage, qui est basée sur la subdivision des triangles, les sommets ont en moyenne 6 voisins. On choisit donc :

$$m_{\text{continuité}} = \frac{11}{6}w^2$$

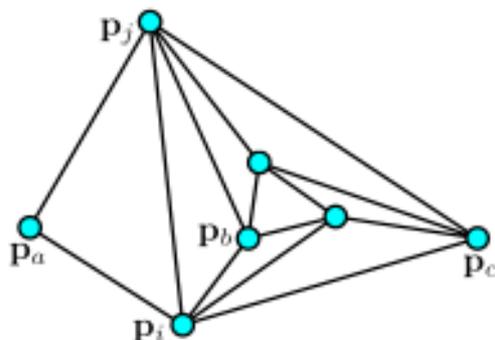


FIG. 3.17 – Cas où les opérations de remaillage sont interdites entre les sommets \mathbf{p}_i et \mathbf{p}_j

La courbure maximale apparaît lorsque tous les voisins de \mathbf{p}_i sont confondus en un coin du cube de centre \mathbf{p}_i et de largeur $2w$. On a alors :

$$\left\| \mathbf{p}_i - \frac{1}{\text{card}(V_i)} \sum_{j \in V_i} \mathbf{p}_j \right\| = 2w\sqrt{3}$$

Il faut remarquer que ce cas de figure ne se produit jamais sur le maillage. En effet, les voisins d'un sommet, qui sont obligatoirement voisins entre eux, ne peuvent être confondus. Cependant, cette formulation nous permet de conserver l'équivalence avec celle du contour 2D. Le maximum théorique de l'énergie de courbure est :

$$m_{\text{courbure}} = (2w\sqrt{3})^2 = 12w^2$$

L'énergie de gradient maximale est $m_{\text{gradient}} = 255$. Le maximum de l'énergie ballon advient lorsque $\tilde{\mathbf{p}}_i$ est à l'opposé de la normale. Le vecteur $w\mathbf{n}_i$ pointe dans la direction d'un coin du cube de centre \mathbf{p}_i tandis que $\tilde{\mathbf{p}}_i$ est situé au coin opposé. On a alors :

$$m_{\text{ballon}} = \left(w + \frac{w\sqrt{3}}{2} \right)^2 = \frac{w^2(7 + 4\sqrt{3})}{4}$$

3.3 Discussion

Dans ce chapitre, nous avons présenté nos méthodes de contour actif pour la segmentation 2D et de surface active pour la segmentation 3D. Le parallèle entre ces modèles est évident car de nombreux concepts intervenant dans le modèle de contour sont repris ou étendus dans le modèle de surface. En ce qui concerne la modélisation continue, la différence principale entre le contour et la surface réside dans la paramétrisation. Le vecteur position de la surface $\mathbf{s}(u, v)$ étant fonction de deux paramètres, l'expression des énergies internes de la surface n'est pas triviale par rapport à celle du contour 2D. La modélisation discrète

permet de s'affranchir de cette difficulté. Quelle que soit la dimension de l'espace considéré, le contour et la surface sont tous deux décrits par un ensemble de sommets. L'extension des énergies discrètes du contour à celles de la surface est alors naturelle. Par ailleurs, la minimisation de l'énergie et la reparamétrisation suivent des principes similaires en 2D et 3D.

Le formalisme présenté ici constitue le socle commun des travaux décrits aux chapitres suivants. Les modèles sont liés à l'image par l'intermédiaire d'un terme de gradient et réalisent donc une segmentation basée contour. La méthode décrite ici reste générale et autorise de nombreuses extensions, tant sur le plan des énergies que de l'évolution.

Chapitre 4

Amélioration de la méthode d'évolution

Nous envisageons ici notre modèle déformable en terme de performances. L'objectif de ce chapitre est double. D'un côté, nous proposons des améliorations de la méthode décrite au chapitre précédent afin d'accélérer le processus de segmentation. De l'autre, nous présentons des approches concurrentes à notre méthode dans le but de les confronter.

Pour pouvoir parler d'amélioration ou de confrontation, il est nécessaire de disposer de critères de comparaison. Nous distinguons les critères intrinsèques, propres à la méthode considérée, comme la complexité algorithmique, et les critères relatifs aux performances, comme le nombre d'itérations nécessaires ou la qualité de segmentation. Pour évaluer cette dernière de manière objective, nous avons besoin d'une métrique appropriée pour mesurer l'adéquation entre la segmentation obtenue par le modèle déformable et une segmentation de référence. Nous utilisons pour cela deux mesures basées sur la distance de Hausdorff.

Les améliorations proposées portent sur la déformation du contour polygonal et du maillage. Elles reposent sur des optimisations de l'espace de recherche parcouru par l'algorithme glouton. Deux idées principales guident le développement de ces optimisations. La première consiste à orienter la fenêtre de recherche des sommets de façon à suivre la direction qui minimise l'énergie le plus rapidement. Nous visons ainsi la réduction du nombre d'itérations. La seconde cherche à réduire l'espace de recherche au maximum, de façon à n'explorer que les positions qui influenceront le plus la déformation. Outre les méthodes d'accélération, nous souhaitons situer notre modèle déformable par rapport à d'autres approches. Pour cela, nous étudions une autre méthode d'évolution, l'approche physique, et une méthode d'implémentation autre que les modèles discrets, qui sont les ensembles de niveaux. Les améliorations de l'algorithme glouton ainsi que les approches alternatives sont comparées sur des images de test.

4.1 Evaluation de la surface

4.1.1 Distance de Hausdorff

Comparer objectivement deux méthodes en terme de qualité de segmentation implique l'utilisation d'une métrique. Cette métrique permet de quantifier la fidélité des segmentations obtenues par rapport à la segmentation réalisée par un expert humain. Parmi les critères d'évaluation, on distingue les approches non-supervisées et supervisées. Pour une revue détaillée des méthodes d'évaluation, le lecteur pourra se référer à la thèse de Chabrier [Cha05]. Les méthodes non supervisées évaluent la segmentation par des critères statistiques, sans frontières de référence. Ces méthodes se prêtent à l'évaluation d'un partitionnement en régions, où toute l'image est segmentée. Un exemple de critère statistique en évaluation non supervisée est le contraste entre les régions obtenues. D'autre part, les méthodes supervisées comparent la segmentation estimée, obtenue par la méthode que l'on souhaite évaluer, avec une segmentation de référence. Sur une image synthétique, la référence est directement établie lors de la construction de l'image. Sur des images réelles, la segmentation de référence est une vérité terrain fournie par un ou plusieurs expert(s), qui délimite(nt) manuellement la région d'intérêt. L'extraction du contour réel est ensuite effectuée par sélection des pixels de bord de la région. Ce principe est illustré en figure 4.1 sur une coupe du cœur obtenue par résonance magnétique. Chaque expert donne sa propre interprétation, il convient donc de réaliser un compromis entre les différentes vérités terrain.

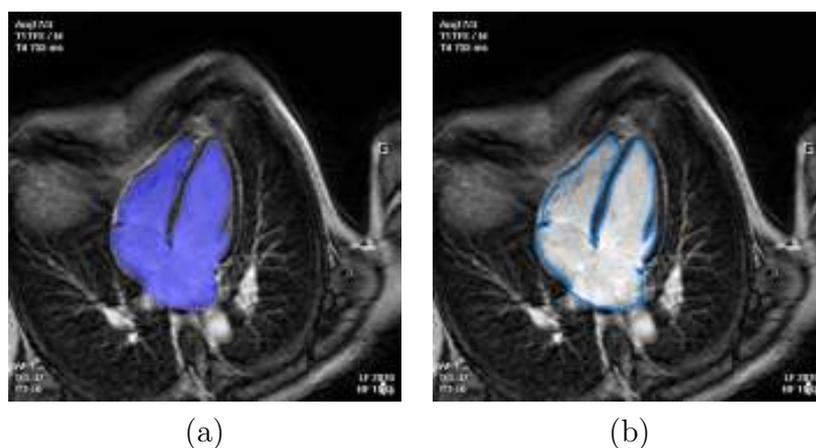


FIG. 4.1 – Extraction de la frontière de référence par segmentation experte. (a) Région colorée manuellement par l'expert (b) Frontière de référence obtenue par extraction des bords de la région

Un critère très utilisé pour l'évaluation de segmentations en régions est l'indice de

similarité S , qui varie entre 0 et 1. Pour une région donnée, l'indice se calcule comme suit :

$$S = 2 \frac{\text{card}(R_E \cap R_V)}{\text{card}(R_E) + \text{card}(R_V)} \quad (4.1)$$

où R_E et R_V sont les ensembles de points appartenant respectivement à la région estimée et à la région de référence. L'indice S est d'autant plus proche de 1 que la région estimée se superpose à la région réelle. L'inconvénient de l'indice de similarité est qu'il est dédié à l'évaluation de la segmentation en régions. La notion de distance entre les frontières n'est pas prise en compte. En effet, deux segmentations peuvent avoir des écarts très différents par rapport à la référence tout en ayant la même valeur d'indice de similarité. Nous considérons qu'une segmentation orientée contour est mieux évaluée par un critère prenant en compte la distance avec la frontière réelle, comme la distance de Hausdorff.

Soient deux ensembles finis de points $A = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p\}$ et $B = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_q\}$. La distance de Hausdorff H , présentée dans [BTE98], mesure l'éloignement de deux ensembles dans un espace métrique. Elle est exprimée comme suit :

$$H(A, B) = \max(h(A, B), h(B, A)) \quad (4.2)$$

où h est la distance de Hausdorff orientée. Etant donnée une métrique, en considérant pour chaque point de A la distance le séparant du point le plus proche dans B , la distance orientée $h(A, B)$ mesure le maximum de ces distances. En utilisant la métrique euclidienne, on écrit :

$$h(A, B) = \max_{\mathbf{a} \in A} \min_{\mathbf{b} \in B} \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| \quad (4.3)$$

Ainsi, la distance de Hausdorff mesure l'écart maximal existant entre les deux ensembles de points. Baddeley [Bad92] et Huttenlocher *et al* [HKR93; HR93] utilisent cette distance pour comparer plusieurs images entre elles. Nous l'utilisons pour la comparaison de frontières dans une même image. En notant \mathcal{S} l'ensemble des pixels/voxels appartenant à la frontière obtenue par notre modèle déformable et \mathcal{R} l'ensemble des pixels/voxels appartenant à la frontière réelle, nous mesurons l'erreur maximale commise par notre modèle en calculant $H(\mathcal{S}, \mathcal{R})$.

La distance de Hausdorff modifiée H_{mean} , introduite par Dubuisson et Jain [DJ94], mesure quant à elle l'écart moyen entre deux ensembles de points :

$$H_{\text{mean}}(A, B) = \max(h_{\text{mean}}(A, B), h_{\text{mean}}(B, A)) \quad (4.4)$$

où h_{mean} est la distance de Hausdorff modifiée orientée. Etant donnée une métrique, en considérant pour chaque point de A la distance le séparant du point le plus proche dans B , la distance orientée $h_{\text{mean}}(A, B)$ mesure la moyenne de ces distances. En utilisant la norme euclidienne, on écrit :

$$h_{\text{mean}}(A, B) = \frac{1}{\text{card}(A)} \sum_{\mathbf{a} \in A} \min_{\mathbf{b} \in B} \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| \quad (4.5)$$

L'ajustement moyen entre la surface estimée et la surface réelle est mesuré par la quantité $H_{\text{mean}}(\mathcal{S}, \mathcal{R})$. D'après ses auteurs, la distance de Hausdorff modifiée a l'avantage d'être moins sensible au bruit que la distance de Hausdorff. Un point de B isolé et très éloigné des points de A pénalisera beaucoup $H(A, B)$ mais son influence sera moindre sur $H_{\text{mean}}(A, B)$. Ce qui est qualifié de bruit par Dubuisson et Jain est pour nous une information valable. En effet, un point de la surface estimée \mathcal{S} très éloigné de \mathcal{R} , aussi isolé soit-il, traduit une erreur de segmentation dont nous devons rendre compte. Dans notre cas, la distance moyenne est une information complémentaire à la distance de Hausdorff. Considérons les contours représentés en figure 4.2. Les distances fictives ci-dessous illustrent bien ce principe de complémentarité :

$$\begin{array}{ll} H_{\text{mean}}(\mathcal{S}_1, \mathcal{R}) = 0.1 & H(\mathcal{S}_1, \mathcal{R}) = 10 \\ H_{\text{mean}}(\mathcal{S}_2, \mathcal{R}) = 1 & H(\mathcal{S}_2, \mathcal{R}) = 1 \end{array}$$

Au regard de ces distances, il est difficile de dire quelle surface, de \mathcal{S}_1 et de \mathcal{S}_2 , est celle qui correspond le moins à \mathcal{R} . Pour cette raison, nous considérons que l'utilisation conjointe des deux mesures permet une meilleure évaluation de la segmentation, plutôt que d'utiliser l'une ou l'autre. Par ailleurs, la figure 4.2 met aussi en évidence la nécessité d'avoir des mesures bilatérales, c'est-à-dire de calculer la distance selon les deux orientations. Dans notre exemple, \mathcal{R} est relativement proche de \mathcal{S}_1 mais la réciproque est fautive : $h(\mathcal{R}, \mathcal{S}_1) \ll h(\mathcal{S}_1, \mathcal{R})$. Notons enfin que les distances de Hausdorff sont indépendantes de la topologie ou de la connexité des ensembles de points. Elles sont également généralisables à des surfaces de dimension supérieure.

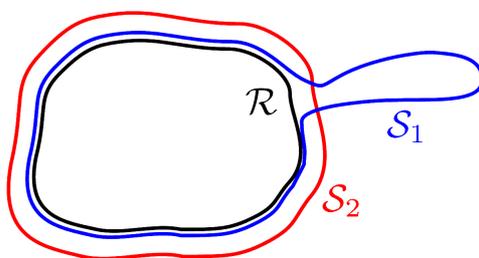


FIG. 4.2 – Comparaison de contours par distances de Hausdorff

4.1.2 Voxélisation du maillage

La distance de Hausdorff compare des ensembles de points. Pour pouvoir être mise en correspondance avec la surface de référence, la surface que nous générons par modèle déformable doit être échantillonnée à la même résolution que celle de l'image. Nous sommes amenés à mesurer la qualité des frontières représentées de manière explicite, avec notre modèle de contour ou de surface active, ou de manière implicite, avec une implémentation

en ensembles de niveaux. Les surfaces implicites sont propices à l'application de la distance de Hausdorff, car elles sont discrétisées sur la même grille que l'image. A l'inverse, les modèles explicites nécessitent une phase de discrétisation en pixels ou voxels selon la dimension. En 2D, les arêtes sont discrétisées avec un algorithme de type Bresenham (le terme *rasterization* est souvent employé pour désigner cette étape). En 3D, le passage d'un maillage à une surface en voxels est réalisé par voxélisation [Kau87] (l'opération inverse est une triangulation). Le passage d'une représentation à l'autre est illustré en figure 4.3. La triangulation de surfaces voxélisées est abordée par Lorensen et Cline [LC87] avec l'algorithme des *Marching Cubes*. Cette approche connaît de nombreuses variantes et améliorations, telles que la méthode de Lopes et Brodlie [LB03] ou celle des *Marching Triangles* développée par Hilton *et al* [HSIW96].

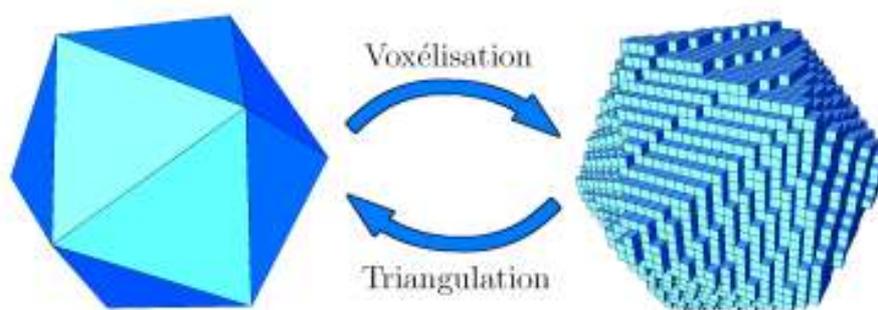


FIG. 4.3 – Passage d'un maillage à un volume par voxélisation, et d'un volume à un maillage par triangulation

Afin de voxéliser le maillage, nous voxélisons chaque facette triangulaire. Les difficultés d'une telle tâche sont les mêmes que celles rencontrées pour discrétiser une droite dans le plan : générer une structure sans trou et d'épaisseur unitaire partout, comme illustré en figure 4.4. Considérons l'algorithme de Bresenham pour tracer une droite entre deux points du plan $\mathbf{x}_1 = (x_1, y_1)^T$ et $\mathbf{x}_2 = (x_2, y_2)^T$. La méthode pour parcourir les x et y dépend de la pente de la droite passant par \mathbf{x}_1 et \mathbf{x}_2 . Si $|x_1 - x_2| > |y_1 - y_2|$, l'algorithme incrémente x à chaque itération et modifie y en conséquence. Si $|x_1 - x_2| < |y_1 - y_2|$, l'algorithme incrémente y à chaque itération et modifie x en conséquence. La coordonnée incrémentée à chaque itération est celle sur laquelle la projection de la droite est de longueur maximale. Par extension de ce principe en 3D, le triangle est projeté sur le plan qui conduit à la projection d'aire maximale, ce qui revient à supprimer la coordonnée maximale de la normale (en valeur absolue), comme représenté en figure 4.5. Le triangle 2D obtenu est discrétisé [Dun83]. Les pixels appartenant au triangle 2D sont parcourus en calculant la coordonnée manquante, à partir de l'équation cartésienne du plan. Un point $\mathbf{x} = (x, y, z)^T$ appartient au plan \mathcal{P} défini par une origine \mathbf{p} et une normale $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)^T$ si :

$$(\mathbf{x} - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{n} = 0$$

qui se réécrit :

$$n_x x + n_y y + n_z z + d = 0 \quad \text{avec} \quad d = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{n}$$

qui est l'équation cartésienne implicite du plan. En prenant pour exemple que le triangle 3D ait été projeté sur le plan XY , nous retrouvons la coordonnée z manquante en déterminant l'équation explicite :

$$z = ax + by + c$$

$$a = -\frac{n_x}{n_z} \quad b = -\frac{n_y}{n_z} \quad c = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{n}}{n_z}$$

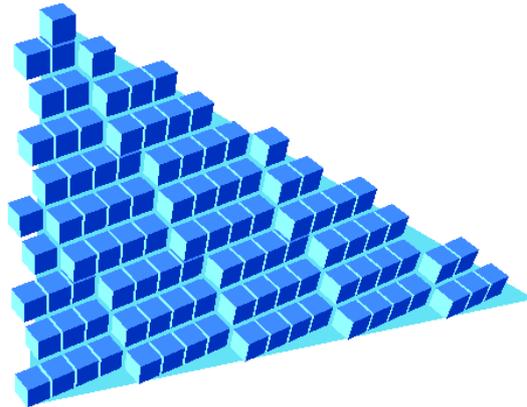


FIG. 4.4 – Voxélisation de triangle : la discrétisation doit être sans trou et d'épaisseur unitaire

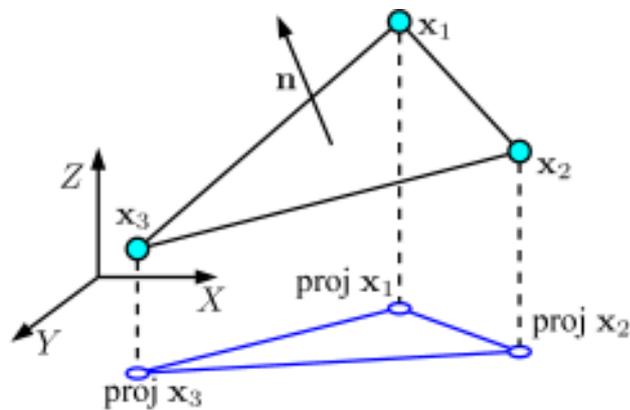


FIG. 4.5 – Projection du triangle sur le plan qui maximise l'aire en vue de sa voxélisation

Enfin, la voxélisation d'un triangle est résumée dans l'algorithme suivant :

VoxeliserTriangle(\mathbf{x}_1 : point, \mathbf{x}_2 : point, \mathbf{x}_3 : point)

$$\mathbf{n} \leftarrow \frac{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \wedge (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3)}{\|(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \wedge (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3)\|}$$

Si $|n_z| > |n_x|$ et $|n_z| > |n_y|$ **alors**

// Projection sur le plan XY : calcul de z à partir de x et y

$$a \leftarrow -\frac{n_x}{n_z}$$

$$b \leftarrow -\frac{n_y}{n_z}$$

$$c \leftarrow \frac{\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{n}}{n_z}$$

Pour tout $(x, y) \in \text{Triangle2D}((x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3))$ **faire**
 MarquerVoxel $(x, y, \lfloor ax + by + c \rfloor)$
FinPour

Sinon Si $|n_y| > |n_x|$ et $|n_y| > |n_z|$ **alors**
 // Projection sur le plan XZ : calcul de y à partir de x et z
 ...
Sinon Si $|n_x| > |n_y|$ et $|n_x| > |n_z|$ **alors**
 // Projection sur le plan YZ : calcul de x à partir de y et z
 ...
FinSi

en admettant que la fonction Triangle2D renvoie l'ensemble des pixels d'un triangle du plan.

4.2 Améliorations de l'algorithme glouton

La segmentation par modèle déformable peut être divisée en deux étapes distinctes. La première regroupe tous les traitements relatifs à l'initialisation, notamment le calcul du potentiel externe de l'image (gradient, carte de distances, ...) et la détermination de la position et de la forme initiale du modèle déformable. La seconde étape est la déformation proprement dite du contour ou de la surface. Plus particulièrement en imagerie tridimensionnelle, où la quantité de données est très importante, le coût calculatoire de la méthode de segmentation conditionne son champ d'application.

Afin d'accélérer le processus de segmentation, nous proposons des améliorations de la méthode de segmentation qui interviennent à l'étape de déformation du contour ou de la surface. Ces améliorations ont pour objet la fenêtre de recherche de l'algorithme glouton. Elles sont indépendantes de la formulation énergétique, car elles peuvent être appliquées quelle que soit la fonctionnelle d'énergie à minimiser. Nos méthodes d'optimisation de l'espace de recherche ont des philosophies différentes pour atteindre le même but. D'un côté, nous orientons l'espace de recherche de façon à réduire le nombre d'itérations. De l'autre, nous réduisons l'espace de recherche à sa plus simple expression pour réduire le coût de chaque itération. Ainsi, le compromis à réaliser se situe entre le nombre d'itérations et la largeur de l'espace de recherche parcouru à chaque itération.

4.2.1 Orientation de la fenêtre

L'objectif des méthodes d'accélération présentées ici est de réduire le nombre total d'itérations pour atteindre les frontières de l'objet. De façon générale, nous permettons aux sommets d'opérer des déplacements plus importants en moins d'itérations, en orientant l'espace de recherche de la manière la plus intéressante du point de vue de la minimisation. L'algorithme glouton déplace un sommet à la position qui minimise immédiatement son énergie, d'où son appellation. Si nous poussons plus loin ce principe, nous pouvons émettre l'hypothèse qu'une direction minimisant l'énergie d'un sommet à un instant donné a de fortes chances de la minimiser à nouveau aux instants suivants. Nous décrivons ici deux algorithmes basés sur cette hypothèse : la fenêtre décalée et la recherche linéaire. A l'origine, ces méthodes ont été développées pour le modèle de contour actif 2D par Olivier *et al* [OBR05]. Nos extensions de ces approches au maillage déformable ont donné lieu à publications dans [OMBR06a] et [OMBR06b].

La méthode de la fenêtre décalée

La méthode présentée dans cette section consiste à orienter la fenêtre de recherche dans la direction paraissant la plus intéressante pour minimiser l'énergie d'un sommet donné. Si, à l'itération t , un sommet s'est déplacé dans une direction \mathbf{v} , il a de fortes chances d'opérer un déplacement similaire à l'itération $t + 1$. Il est également possible qu'il se fixe sur sa position, mais il est très peu probable qu'il emprunte une direction opposée à \mathbf{v} . A l'itération $t + 1$, il est donc superflu de calculer l'énergie du sommet aux voxels situés à l'opposé de \mathbf{v} . En décalant la fenêtre dans le sens de \mathbf{v} , l'algorithme glouton parcourt moins de voxels qui ont peu de chances d'être des minima locaux de l'énergie.

La méthode utilise une fenêtre qui peut être décentrée par rapport au sommet. Pour pouvoir représenter le décalage, nous notons $\mathbf{d}_i^{(t)}$ la position relative du sommet \mathbf{p}_i dans sa fenêtre de recherche à l'instant t . Nous choisissons comme origine le coin supérieur gauche du voisinage, comme représenté sur la figure 4.6. La fenêtre de recherche $W(\mathbf{p}_i^{(t)})$ munie de son décalage s'exprime comme l'ensemble de voxels suivant :

$$W(\mathbf{p}_i^{(t)}) = \left\{ \mathbf{p}_i^{(t)} + \mathbf{r} - \mathbf{d}_i^{(t)} \mid \mathbf{r} \in \llbracket 0, w - 1 \rrbracket^3 \right\} \quad (4.6)$$

A l'initialisation de l'algorithme, à l'instant $t = 0$, la fenêtre est centrée autour de \mathbf{p}_i , comme dans l'algorithme glouton initial :

$$\mathbf{d}_i^{(0)} = \left(\left\lfloor \frac{w}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{w}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{w}{2} \right\rfloor \right)^T \quad (4.7)$$

Par la suite, nous allons être amenés à borner des vecteurs, de façon à limiter les décalages. Nous introduisons la fonction β qui limite les coordonnées d'un vecteur entre une borne

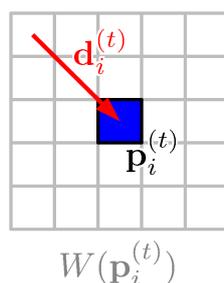


FIG. 4.6 – Fenêtre initiale centrée

inférieure b_{inf} et une borne supérieure b_{sup} :

$$\beta : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad (4.8)$$

$$(b_{\text{inf}}, b_{\text{sup}}, \mathbf{v}) \longmapsto \beta(b_{\text{inf}}, b_{\text{sup}}, \mathbf{v})$$

où $b_{\text{inf}} \leq b_{\text{sup}}$. Le vecteur borné se calcule comme suit :

$$\beta(b_{\text{inf}}, b_{\text{sup}}, \mathbf{v}) = \begin{pmatrix} \max(b_{\text{inf}}, \min(b_{\text{sup}}, v_x)) \\ \max(b_{\text{inf}}, \min(b_{\text{sup}}, v_y)) \\ \max(b_{\text{inf}}, \min(b_{\text{sup}}, v_z)) \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

Nous notons $\mathbf{v}_i^{(t)}$ le déplacement opéré par le sommet \mathbf{p}_i à l'itération t . Comme ce déplacement va être utilisé pour décaler la fenêtre, nous le bornons de façon à retenir un déplacement maximum d'un voxel dans chaque direction :

$$\mathbf{v}_i^{(t)} = \beta(-1, 1, \mathbf{p}_i^{(t+1)} - \mathbf{p}_i^{(t)}) \quad (4.10)$$

Ainsi, le décalage ne peut être modifié que par pas unitaire dans chaque direction. Le décalage est doté d'une certaine inertie destinée à le faire varier de façon régulière. Connaissant le déplacement $\mathbf{v}_i^{(t)}$, nous pouvons définir le prochain décalage $\mathbf{d}_i^{(t+1)}$ à appliquer :

$$\mathbf{d}_i^{(t+1)} = \beta(1, w - 2, \mathbf{d}_i^{(t)} - \mathbf{v}_i^{(t)}) \quad (4.11)$$

En limitant les coordonnées du décalage entre 1 et $w - 2$, nous nous assurons que le sommet ne se trouve pas sur un bord de la fenêtre, pour qu'il puisse tout de même emprunter une direction opposée à la précédente si le cas se présente. La figure 4.7 représente la fenêtre à deux itérations successives. La méthode de la fenêtre décalée est résumée dans l'algorithme suivant :

Fenêtre décalée

$t \leftarrow 0$

TantQue Critère d'arrêt non vérifié **faire**

Pour $i \leftarrow 1$ à n **faire**

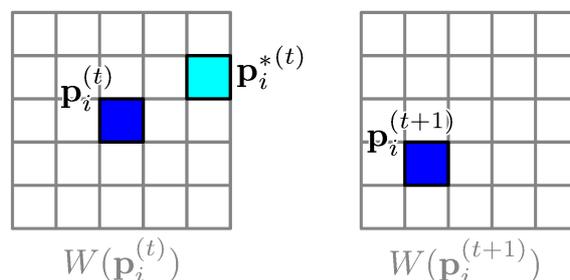


FIG. 4.7 – Méthode de la fenêtre décalée : positions relatives du sommet \mathbf{p}_i dans sa fenêtre à deux itérations successives

$$\begin{aligned}
 \mathbf{p}_i^{(t+1)} &= \operatorname{argmin}_{\tilde{\mathbf{p}}_i \in W(\mathbf{p}_i^{(t)})} E(\tilde{\mathbf{p}}_i) \\
 \mathbf{v}_i^{(t)} &= \beta(-1, 1, \mathbf{p}_i^{(t+1)} - \mathbf{p}_i^{(t)}) \\
 \mathbf{d}_i^{(t+1)} &= \beta(1, w - 2, \mathbf{d}_i^{(t-1)} - \mathbf{v}_i^{(t)}) \\
 W(\mathbf{p}_i^{(t+1)}) &= \left\{ \mathbf{p}_i^{(t+1)} + \mathbf{r} - \mathbf{d}_i^{(t+1)} \mid \mathbf{r} \in \llbracket 0, w - 1 \rrbracket^3 \right\} \\
 \mathbf{FinPour} & \\
 t &\leftarrow t + 1 \\
 \mathbf{FinTantQue} &
 \end{aligned}$$

où $E(\tilde{\mathbf{p}}_i)$ est l'énergie du sommet \mathbf{p}_i à la position testée $\tilde{\mathbf{p}}_i$, comme décrit au chapitre précédent.

Recherche linéaire

Considérons le cas général de l'optimisation d'une fonction objectif f non linéaire selon un vecteur de variables \mathbf{x} , le but étant de déterminer les valeurs \mathbf{x}^* minimisant $f(\mathbf{x})$. Les méthodes par descente locale (méthode de Newton, descente de gradient, ...) utilisent le schéma itératif suivant :

$$\mathbf{x}^{(t+1)} = \mathbf{x}^{(t)} + \alpha \mathbf{v}^{(t)} \quad (4.12)$$

où α est un pas inférieur à 1 et $\mathbf{v}^{(t)}$ est la direction suivant laquelle f est minimisée localement. Par exemple, pour une descente de gradient, on a $\mathbf{v}^{(t)} = \nabla f^{(t)}$. Les méthodes de recherche linéaire (en anglais, *line search*) décrites dans [NW99] diffèrent des méthodes de descente locale par le fait qu'elles recherchent un minimum local dans la direction $\mathbf{v}^{(t)}$:

$$\begin{aligned}
 \alpha^* &= \operatorname{argmin}_{\alpha \in [a_1, a_2]} f(\mathbf{x}^{(t)} + \alpha \mathbf{v}^{(t)}) \\
 \mathbf{x}^{(t+1)} &= \mathbf{x}^{(t)} + \alpha^* \mathbf{v}^{(t)}
 \end{aligned} \quad (4.13)$$

où la recherche dans l'intervalle $[a_1, a_2]$ est effectuée à un pas fixe. Cette méthode permet de déterminer la valeur optimale du pas α afin d'améliorer la convergence. Appliqué à la déformation de surface par algorithme glouton, le principe de la recherche linéaire est similaire à la méthode de la fenêtre décalée : il s'agit d'anticiper la prochaine itération de l'algorithme glouton en utilisant les informations obtenues lors des précédentes itérations. Précédemment, nous avons déplacé la fenêtre de recherche dans la direction la plus intéressante pour minimiser l'énergie du sommet. La méthode par recherche linéaire étend ce principe en cherchant un minimum local uniquement dans cette direction. Etant donné un sommet se déplaçant dans la direction \mathbf{v} , la différence majeure avec la méthode précédente est que nous n'allons pas utiliser \mathbf{v} pour décaler la fenêtre, mais pour explorer une ligne de voxels qui constituera la fenêtre de recherche linéaire. Chaque itération de la méthode par recherche linéaire est composée de deux phases. La première phase est la minimisation de l'énergie dans la fenêtre cubique, en tout point similaire à l'algorithme glouton initial. La deuxième phase est la minimisation de l'énergie dans la fenêtre linéaire.

Nous notons $\mathbf{p}_i^{*(t)}$ la position intermédiaire du sommet, générée à la fin de la première phase. Cette position est celle qui minimise l'énergie dans la fenêtre cubique et qui constitue le point de départ de la ligne d'exploration (voir figure 4.8).

$$\mathbf{p}_i^{*(t)} = \underset{\tilde{\mathbf{p}}_i \in W(\mathbf{p}_i^{(t)})}{\operatorname{argmin}} E(\tilde{\mathbf{p}}_i) \quad (4.14)$$

Le vecteur unitaire $\mathbf{v}_i^{(t)}$ indique la direction prise par le sommet \mathbf{p}_i à l'instant t :

$$\mathbf{v}_i^{(t)} = \frac{\mathbf{p}_i^{*(t)} - \mathbf{p}_i^{(t)}}{\left\| \mathbf{p}_i^{*(t)} - \mathbf{p}_i^{(t)} \right\|} \quad (4.15)$$

La ligne de recherche W_L est l'ensemble des points défini comme suit :

$$W_L(\mathbf{p}_i^{(t)}) = \left\{ \mathbf{p}_i^{*(t)} + \lfloor \mathbf{r} \rfloor \mid \mathbf{r} = k\mathbf{v}_i^{(t)}, k \in [0, L] \right\} \quad (4.16)$$

où L est la longueur en voxels de la ligne. On admet que l'opérateur d'arrondi s'applique également aux quantités vectorielles, de sorte que :

$$\lfloor \mathbf{r} \rfloor = (\lfloor r_x \rfloor, \lfloor r_y \rfloor, \lfloor r_z \rfloor)^T \quad (4.17)$$

L'ensemble des voxels sur le segment de droite est déterminé à l'aide de l'algorithme de Bresenham 3D, de sorte que le déplacement d'un sommet s'effectue toujours par pas entiers. Finalement, le sommet à l'itération $t + 1$ est celui qui minimise l'énergie parmi tous les voxels situés sur la ligne de recherche :

$$\mathbf{p}_i^{(t+1)} = \underset{\tilde{\mathbf{p}}_i^* \in W_L(\mathbf{p}_i^{(t)})}{\operatorname{argmin}} E(\tilde{\mathbf{p}}_i^*) \quad (4.18)$$

Lors de cette phase de minimisation, les énergies sont calculées en considérant les positions intermédiaires \mathbf{p}_i^* des sommets. La méthode complète de recherche linéaire est synthétisée dans l'algorithme suivant :

Recherche linéaire

$t \leftarrow 0$

TantQue Critère d'arrêt non vérifié **faire**

// Phase 1 : fenêtre cubique

Pour $i \leftarrow 1$ à n **faire**

$$\mathbf{p}_i^{*(t)} = \operatorname{argmin}_{\tilde{\mathbf{p}}_i \in W(\mathbf{p}_i^{(t)})} E(\tilde{\mathbf{p}}_i)$$

FinPour

// Phase 2 : fenêtre linéaire

Pour $i \leftarrow 1$ à n **faire**

$$\mathbf{v}_i^{(t)} = \frac{\mathbf{p}_i^{*(t)} - \mathbf{p}_i^{(t)}}{\|\mathbf{p}_i^{*(t)} - \mathbf{p}_i^{(t)}\|}$$

$$W_L(\mathbf{p}_i^{(t)}) = \left\{ \mathbf{p}_i^{*(t)} + \lfloor \mathbf{r} \rfloor \mid \mathbf{r} = k\mathbf{v}_i^{(t)}, k \in [0, L] \right\}$$

$$\mathbf{p}_i^{(t+1)} = \operatorname{argmin}_{\tilde{\mathbf{p}}_i^* \in W_L(\mathbf{p}_i^{(t)})} E(\tilde{\mathbf{p}}_i^*)$$

FinPour

$t \leftarrow t + 1$

FinTantQue

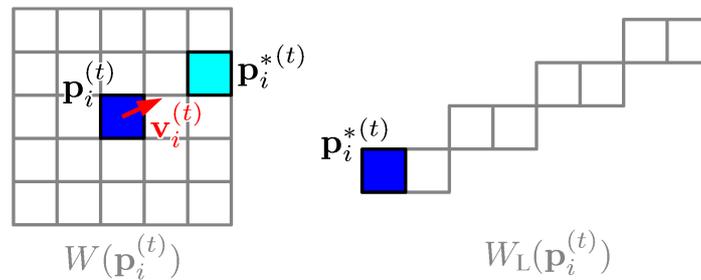


FIG. 4.8 – Méthode par recherche linéaire : positions relatives du sommet \mathbf{p}_i dans les fenêtres cubique et linéaire

4.2.2 Réduction du voisinage : évolution selon la normale

Fenêtre normale

Les méthodes précédemment décrites visent l'accélération de la convergence par réduction du nombre d'itérations en orientant les fenêtres de recherche. Nous développons

ici une méthode basée sur un autre principe, qui consiste à réduire au maximum l'espace de recherche pour diminuer le coût calculatoire des itérations (quitte à augmenter le nombre d'itérations). L'espace de recherche que nous construisons repose sur le vecteur normal. Nous nous basons sur un principe couramment admis dans l'évolution des contours implicites, implémentés par ensembles de niveaux. Considérons le contour planaire Γ dont le vecteur position \mathbf{c} est fonction du paramètre spatial u et du temps t . L'équation d'évolution générale suivante gouverne le mouvement du contour :

$$\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} = \mathbf{f}(u, t) \quad (4.19)$$

où $\mathbf{f}(u, t)$ est la force s'appliquant au point de contour $\mathbf{c}(u)$ à l'instant t . Cette force peut être exprimée dans le repère de Frenet, comme une combinaison linéaire d'une composante tangentielle colinéaire à \mathbf{t} et d'une composante normale colinéaire à \mathbf{n} :

$$\mathbf{f}(u, t) = f_T(u, t)\mathbf{t}(u, t) + f_N\mathbf{n}(u, t) \quad (4.20)$$

où f_T et f_N sont les vitesses respectives dans les directions tangentielle et normale. Sapiro [Sap01] met en évidence le fait que seule la composante normale modifie la géométrie du contour, la composante tangentielle n'ayant d'incidence que sur sa paramétrisation. La déformation du contour Γ a lieu uniquement dans la direction \mathbf{n} . En projetant la force $\mathbf{f}(u, t)$ sur \mathbf{n} , ce qui revient à supprimer sa composante tangentielle, nous obtenons :

$$\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} = f_N(u, t)\mathbf{n}(u, t) \quad (4.21)$$

Dans l'algorithme glouton, un sommet n'est pas déplacé par application d'une force mais par recherche de l'énergie minimale. Projeter la force sur la composante normale revient à minimiser l'énergie d'un sommet uniquement dans sa direction normale. En ne calculant l'énergie d'un sommet que sur un nombre fini de points sur sa normale, nous réduisons de façon significative l'espace de recherche.

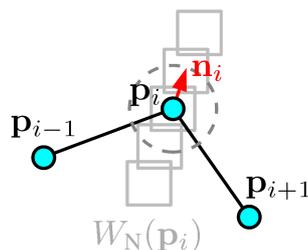
Naturellement, le cheminement que nous venons de décrire est également valable pour une surface. Nous introduisons la fenêtre normale W_N , qui est l'ensemble des points situés sur la normale du sommet à une distance inférieure ou égale à la demi-largeur $\lfloor w/2 \rfloor$. La définition suivante est indépendante de la dimension du modèle :

$$W_N(\mathbf{p}_i) = \{\mathbf{p}_i + k\mathbf{n}_i \mid k \in \llbracket -\lfloor w/2 \rfloor, \lfloor w/2 \rfloor \rrbracket\} \quad (4.22)$$

Une fenêtre normale de largeur $w = 5$ (il est alors plus approprié de parler de longueur) est représentée en figure 4.9. Dans l'équation précédente, k est un entier mais les coordonnées du déplacement $k\mathbf{n}_i$ prennent des valeurs réelles, contrairement à la méthode par recherche linéaire, où la fenêtre ne contient que des déplacements entiers.

Le schéma d'évolution utilisant la fenêtre normale est :

$$\mathbf{p}_i^{(t+1)} = \operatorname{argmin}_{\tilde{\mathbf{p}}_i \in W_N(\mathbf{p}_i^{(t)})} E(\tilde{\mathbf{p}}_i^{(t)}) \quad (4.23)$$

FIG. 4.9 – Fenêtre normale du sommet \mathbf{p}_i de largeur $w = 5$

L'avantage par rapport aux méthodes utilisant un voisinage cubique est que la taille de l'espace de recherche augmente linéairement par rapport à w :

$$\text{card}(W) = w$$

De plus, la taille de l'espace de recherche est indépendante de la dimension du modèle, ce qui est particulièrement avantageux en 3D par rapport à la fenêtre cubique.

Par ailleurs, le critère de reparamétrisation, défini aux équations 3.43 pour le contour 2D et 3.77 pour le maillage 3D, est basé sur la norme infinie, ce qui est uniquement valable lorsque les sommets sont déplacés dans une fenêtre carrée. Nous rappelons que la fusion de sommets a pour rôle d'empêcher les sommets voisins d'être trop proches, pour éviter les auto-intersections du contour ou de la surface. Lorsque l'algorithme glouton est utilisé avec la fenêtre normale, deux sommets voisins \mathbf{p}_i et \mathbf{p}_j risquent de générer des intersections d'arêtes à l'itération $t+1$ si leurs fenêtres respectives se croisent à l'itération t . Si la distance euclidienne entre \mathbf{p}_i et \mathbf{p}_j est au moins w , il est garanti que les lignes des fenêtres normales ne se croisent pas. Avec la fenêtre normale, le critère de reparamétrisation peut donc se formuler en terme de norme euclidienne. Pour tout couple de sommets voisins $(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j)$, la longueur de l'arête vérifie :

$$w \leq \|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j\| \leq 2w \quad (4.24)$$

Par ailleurs, l'algorithme glouton avec fenêtre carrée présente un défaut dont la fenêtre normale permet de s'affranchir. Avec la fenêtre carrée, la vitesse à laquelle la surface se déforme n'est pas isotrope, dans la mesure où elle varie en fonction du point de surface considéré. Ce phénomène est illustré en figure 4.10, où un contour et une surface se déforment sans contraintes externes, sous le seul effet des énergies de courbure et de ballon ($\omega_{\text{courbure}} = 1$, $\omega_{\text{ballon}} = -0.1$ et autres poids à 0). A partir de sa forme circulaire initiale, le contour évolue rapidement vers un carré, et la surface vers un cube. Considérons un contour circulaire évoluant sous l'effet de l'énergie ballon (dans sa direction normale, donc) avec une fenêtre carrée de largeur $w = 3$. A chaque itération, les sommets situés aux points cardinaux vont parcourir une distance égale à 1 pixel, tandis que les sommets situés dans les directions diagonales peuvent se déplacer de $\sqrt{2}$ pixels. En 3D, les sommets situés dans les coins peuvent se déplacer au plus de $\sqrt{3}$ voxels. La fenêtre carrée induit une vitesse d'évolution différente selon la position relative du sommet. Elle ne conserve pas la géométrie de la surface et introduit un biais dans la reconstruction. Quant à la fenêtre

normale, elle garantit une vitesse maximale théorique égale pour tous les sommets, car la distance maximale qu'ils peuvent parcourir est la même quelle que soit leur position. La géométrie du contour et de la surface est alors conservée.

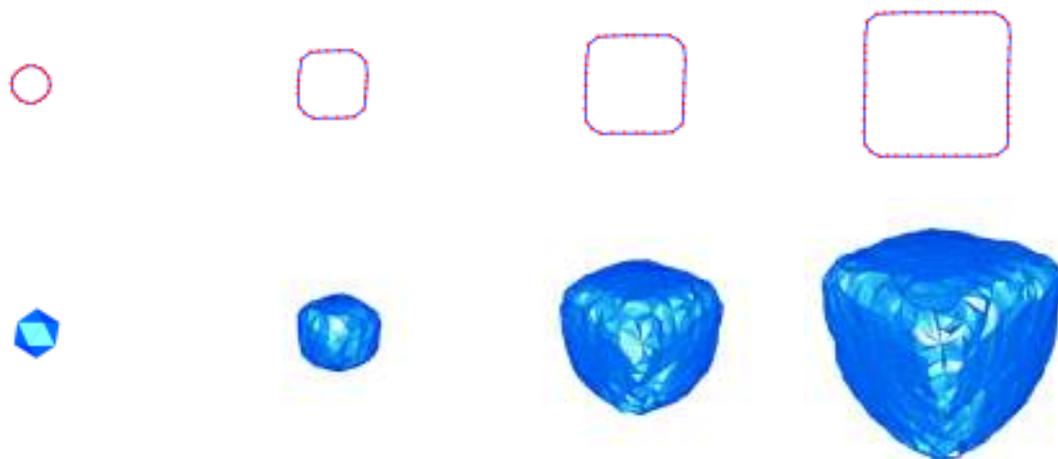


FIG. 4.10 – Evolution du contour (haut) et du maillage (bas) avec l'énergie ballon (fenêtre carrée)

Lissage tangentiel

L'énergie de continuité présentée au chapitre précédent a pour rôle de réduire l'écart-type des distances entre les sommets voisins, c'est-à-dire d'homogénéiser la longueur des arêtes. Elle intervient sur la paramétrisation de la surface plutôt que sur sa géométrie. Le mouvement induit par sa minimisation est donc principalement tangent localement à la surface. Or, avec la fenêtre normale, les mouvements sont contraints d'être orthogonaux à la surface, de sorte que les sommets n'ont plus la possibilité de se déplacer dans le plan tangent. Les longueurs d'arêtes ne peuvent plus être régularisées, d'où une distribution anarchique des sommets sur le maillage, comme le montre la figure 4.12(a).

Le mécanisme de remaillage participe à l'homogénéisation des longueurs d'arêtes, mais avec une plage de distance s'étalant de w à $2w$, ce qui n'est pas suffisamment contraignant pour assurer une répartition constante des sommets. L'énergie de courbure tend quant à elle à rapprocher chaque sommet du barycentre de ses voisins, le rendant ainsi équidistant de ces derniers tout en entraînant un rétrécissement de la surface dû à l'appâtissement local. Nous souhaitons appliquer une régularisation tangentielle qui tend à homogénéiser les longueurs d'arêtes sans rétraction de surface. Si la surface se dilate, cette régularisation ne doit pas s'opposer au mouvement de gonflement. Nous avons vu au chapitre précédent que la minimisation de l'énergie de courbure du maillage est équivalente à un lissage laplacien. Pour réaliser le lissage tangentiel, nous appliquons un lissage laplacien duquel nous

supprimons la composante normale, ce qui revient à projeter la force de lissage laplacien sur le plan tangent local au sommet. Le projeté $\text{proj}_{\mathcal{P}}\mathbf{v}$ d'un vecteur \mathbf{v} sur le plan \mathcal{P} défini par un point \mathbf{p} et sa normale \mathbf{n} est :

$$\text{proj}_{\mathcal{P}}\mathbf{v} = \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$$

Pour chaque sommet \mathbf{p}_i , nous calculons \mathbf{b}_i le barycentre de ses voisins. Le vecteur $\mathbf{b}_i - \mathbf{p}_i$ est la force à appliquer à \mathbf{p}_i pour effectuer un lissage laplacien. Dans notre cas, cette force est projetée sur le plan tangent à la surface au sommet \mathbf{p}_i :

$$\text{proj}_{\mathcal{P}}(\mathbf{b}_i - \mathbf{p}_i) = (\mathbf{b}_i - \mathbf{p}_i) - ((\mathbf{b}_i - \mathbf{p}_i) \cdot \mathbf{n}_i)\mathbf{n}_i$$

Cette projection est représentée en figure 4.11. L'effet du lissage sur la répartition des sommets du maillage triangulaire est illustré en figure 4.12(b). L'étape de lissage tangentiel, formalisée dans l'algorithme suivant, est effectuée après chaque itération de l'algorithme glouton.

Lissage tangentiel

Pour $i \leftarrow 1$ à n **faire**

$$\mathbf{b}_i \leftarrow \frac{1}{\text{card}(V_i)} \sum_{j \in V_i} \mathbf{p}_j$$

$$\mathbf{p}_i \leftarrow \mathbf{p}_i + \frac{1}{2}(\mathbf{b}_i - \mathbf{p}_i - ((\mathbf{b}_i - \mathbf{p}_i) \cdot \mathbf{n}_i)\mathbf{n}_i)$$

FinPour

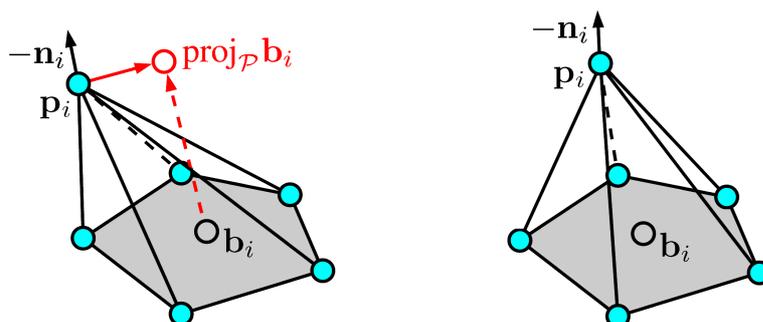
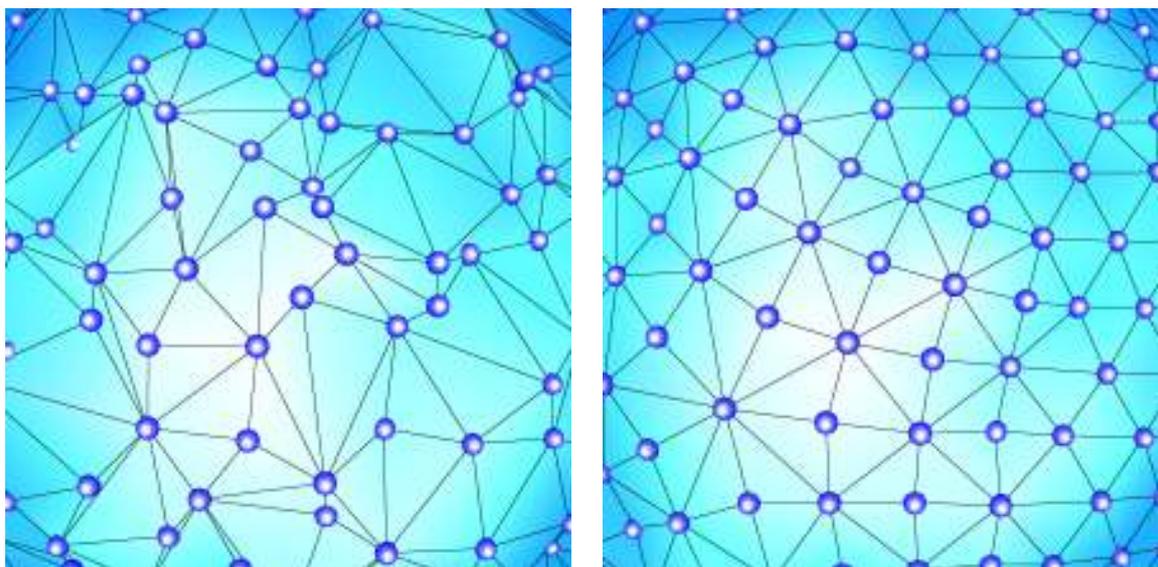


FIG. 4.11 – Lissage tangentiel

L'utilisation conjointe de l'algorithme glouton avec fenêtre normale et du lissage tangentiel nous permet d'obtenir le déplacement de la figure 4.13, à comparer avec l'évolution représentée en figure 4.10.



(a)

(b)

FIG. 4.12 – Effet du lissage tangentiel sur une surface déformée avec la fenêtre normale : sans lissage (a) et avec lissage (b)

Détection des sommets stabilisés

Nous présentons ici une technique visant à accélérer l'algorithme glouton, basée sur une distinction des sommets en deux catégories. D'un côté, les sommets actifs sont les sommets en mouvement, à la recherche d'un minimum local de leur énergie. De l'autre, les sommets inactifs sont ceux qui ont atteint leur état stable, c'est-à-dire la position définitive où leur énergie est minimale. L'accélération de l'algorithme glouton est possible en ne traitant que les sommets actifs. On évite ainsi de calculer l'énergie dans la fenêtre autour de sommets qui resteront immobiles.

Tout d'abord, nous devons détecter les sommets immobiles à l'itération courante, qui sont donc susceptibles d'avoir atteint leur position finale. La difficulté de cette détection réside dans la tendance des sommets à osciller autour d'un minimum local de leur énergie. Tester la différence $\mathbf{p}_i^{(t)} - \mathbf{p}_i^{(t-1)}$ ne permet pas de détecter la convergence du sommet \mathbf{p}_i de manière fiable. Un sommet doit être considéré comme immobile même s'il est en état d'oscillation autour d'une position fixe. Nous notons $d_i^{(t)}$ le déplacement moyen du sommet à l'itération t . Il s'agit de la distance entre la position courante et la moyenne des T positions précédentes :

$$d_i^{(t)} = \left\| \mathbf{p}_i^{(t)} - \frac{1}{T} \sum_{\tau=1}^T \mathbf{p}_i^{(t-\tau)} \right\|$$

Les déplacements oscillatoires de \mathbf{p}_i s'annulent en moyenne. Ainsi, le déplacement moyen $d_i^{(t)}$ sera petit si le sommet est en état d'oscillation. Le choix du paramètre T doit se faire

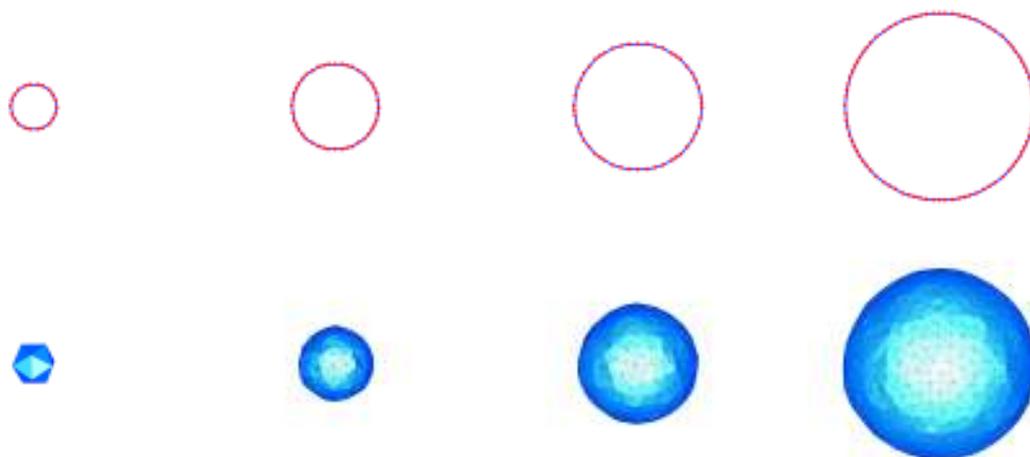


FIG. 4.13 – Evolution du contour (haut) et du maillage (bas) avec énergie ballon (évolution selon la normale)

selon plusieurs considérations. Si est trop petit, nous risquons de considérer les sommets comme immobiles trop tôt, et d'introduire ainsi un biais dans la reconstruction. S'il est trop grand, le gain en temps de calcul sera peu significatif, car l'algorithme glouton continuera à traiter des sommets stabilisés. Le choix du paramètre T est discuté dans la section 4.4.2 détaillant les résultats. Nous notons $\mathcal{M}^{(t)}$ l'ensemble des sommets en mouvement à l'itération t , pour lesquels le déplacement moyen est supérieur à un seuil donné :

$$\mathcal{M}^{(t)} = \left\{ i \mid d_i^{(t)} \geq \left\lfloor \frac{w}{2} \right\rfloor \right\}$$

Nous choisissons comme seuil la demi-largeur de fenêtre $\lfloor w/2 \rfloor$, que l'on peut considérer comme la distance moyenne parcourue en une itération par un sommet en mouvement.

Soit \mathcal{A} l'ensemble des sommets actifs. Nous distinguons immobilité et inactivité. Un sommet est immobile pendant une ou plusieurs itération(s) donnée(s), l'immobilité étant un état transitoire. L'inactivité est quant à elle un état définitif, sachant que tout sommet devenu inactif a été obligatoirement immobile auparavant. Considérons l'énergie d'un sommet en fonction de ses mouvements. Un sommet immobile à l'itération t est situé à une position lui donnant une énergie minimale. L'énergie de gradient dépend uniquement de la position du sommet dans l'image. L'énergie de courbure est fonction de la position du sommet mais aussi de celle de ses voisins, par l'intermédiaire du barycentre. L'énergie ballon fait également intervenir le voisinage, car la normale est calculée à partir de celui-ci. Si un sommet et ses voisins sont immobiles à l'itération t , le sommet sera également immobile à l'itération $t + 1$, son énergie étant désormais constante. Par conséquent, un sommet devient inactif s'il est immobile et que tous ses sommets voisins le sont. La déformation de la surface est optimisée en ne parcourant à chaque itération que les sommets actifs. L'algorithme gloutin avec fenêtre normale et utilisation de la liste des sommets actifs est détaillé ci-dessous :

```

Détection des sommets stabilisés
//  $\mathcal{A}$  est l'ensemble des sommets actifs
 $t \leftarrow 0$ 
TantQue  $\text{card}(\mathcal{A}) \neq 0$  faire
  Pour tout  $i \in \mathcal{A}$  faire
    // Déplacement du sommet
     $\mathbf{p}_i^{(t+1)} = \underset{\tilde{\mathbf{p}}_i \in W_N(\mathbf{p}_i^{(t)})}{\text{argmin}} E(\tilde{\mathbf{p}}_i)$ 

    // Détection de l'immobilité du sommet
     $d_i^{(t+1)} \leftarrow \left\| \mathbf{p}_i^{(t+1)} - \frac{1}{T} \sum_{\tau=0}^{T-1} \mathbf{p}_i^{(t-\tau)} \right\|$ 
    Si  $d_i^{(t+1)} < \left\lfloor \frac{w}{2} \right\rfloor$  alors
       $\mathcal{M}^{(t+1)} \leftarrow \mathcal{M}^{(t+1)} \setminus \{i\}$ 
    FinSi
  FinPour
   $t \leftarrow t + 1$ 
  Pour  $\forall i \in \mathcal{A}$  faire
    // Si le sommet et ses voisins sont immobiles à l'itération  $t$ ,
    // le sommet devient inactif
    Si  $i \notin \mathcal{M}^{(t)}$  et  $\forall j \in V_i, j \notin \mathcal{M}^{(t)}$  alors
       $\mathcal{A} \leftarrow \mathcal{A} \setminus \{i\}$ 
    FinSi
  FinPour
  // Reparamétrisation
  ...
  // Lissage tangentiel
  ...
FinTantQue

```

Il est à noter que l'étape de reparamétrisation crée des nouveaux sommets et les ajoute à \mathcal{A} car un sommet généré par séparation d'arêtes est actif par défaut. La méthode des sommets actifs est efficace lorsqu'une faible proportion de sommets est en mouvement. Comme le montreront les résultats, cette méthode présente un intérêt lorsque de nombreux sommets atteignent leur position finale avant d'autres. C'est le cas par exemple lorsque le contour ou la surface s'accroît dans une structure tubulaire. Les sommets qui atteignent les parois deviennent rapidement inactifs, tandis qu'une minorité de sommets situés aux extrémités du tube est active.

4.3 Méthodes concurrentes

Au chapitre 2, nous avons présenté les modèles déformables en les déclinant selon leurs modes de représentation et méthodes d'évolution. Pour l'implémentation de nos modèles déformables, nous avons privilégié des représentations discrètes, la courbe polygonale en 2D et le maillage triangulaire en 3D, pour leur implémentation intuitive et leur généralité. Pour l'évolution, nous avons opté pour l'algorithme glouton, car il se prête bien à la déformation de modèles discrets quelle que soit leur dimension. Nous confrontons ici notre modèle à d'autres approches, aussi bien du point de vue de l'implémentation que de l'évolution.

Dans un premier temps, nous étudions une autre méthode d'évolution sur nos implémentations discrètes. Il s'agit de l'approche physique, décrite en section 2.2.3, qui présente des caractéristiques semblables à l'algorithme glouton et dont l'utilisation pour la déformation des modèles discrets 3D est très répandue dans la littérature. Nous décrivons une approche physique en rapport étroit avec la minimisation d'énergie par algorithme glouton.

Nous abordons ensuite une autre méthode de représentation des contours et surfaces actives. Les ensembles de niveaux, que nous avons abordés dans la section 2.1.4, permettent de représenter des contours et surfaces de géométrie et topologie arbitraires, tout comme les modèles discrets. Une surface représentée par ensembles de niveaux ne peut être déformée par algorithme glouton, physique ou tout autre méthode applicable sur les représentations discrètes. Elle nécessite une méthode d'évolution propre à sa représentation. Cependant, l'évolution des modèles implicites fait intervenir une fonctionnelle d'énergie ou une équation d'évolution basée sur des forces. Il est donc possible de faire le parallèle entre les termes d'évolution des ensembles de niveaux et ceux des modèles explicites, que ces termes soient internes ou externes.

Soulignons que les méthodes étudiées ont des propriétés semblables à celles d'un modèle discret déformé par algorithme glouton. D'un côté, les algorithmes glouton et physique vont *a priori* entraîner des déformations similaires. A titre d'exemple, une évolution par modèle de forme active serait très différente, car fortement liée au recalage. D'autre part, les maillages et les surfaces implicites visent les mêmes applications de segmentation, à ceci près que les surfaces implicites sont à privilégier lorsque les changements de topologie sont une priorité. Des représentations paramétrées comme les superquadriques sont utilisées dans des cas plus particuliers, où l'on dispose d'un fort *a priori* sur la forme des objets recherchés. Nous confrontons les méthodes sur des aspects théoriques, comme la complexité algorithmique. La comparaison sur les performances, comme le temps de calcul ou la qualité de segmentation par rapport à une référence, est décrite à la section traitant des résultats.

4.3.1 Approche physique

Le choix de l'approche physique comme évolution concurrente à l'approche gloutonne prend en compte plusieurs considérations. Nous souhaitons tout d'abord disposer d'une méthode pouvant s'appliquer indifféremment sur un modèle discret 2D ou 3D. Ce critère exclut l'approche variationnelle. En effet, la discrétisation par différences finies, courante sur les contours actifs polygonaux 2D, ne peut s'appliquer en 3D que sur une surface discrétisée par une grille d'éléments quadrilatéraux, ce qui n'est pas le cas de notre maillage. La discrétisation par éléments finis est possible sur un maillage triangulaire [MT93]. Or, le but premier des éléments finis est de minimiser le nombre de points de contrôles nécessaires et d'éviter le remaillage, car la discrétisation y est statique. Ceci va à l'encontre du principe de reparamétrisation que nous avons établi. Ensuite, remarquons que les approches variationnelles sont très coûteuses, car elles manipulent des matrices de taille importante. Les autres méthodes d'évolution, telles que les modèles de forme active, ne sauraient être comparées avec l'algorithme glouton, dans la mesure où ces méthodes ne visent pas le même objectif. Une autre considération ayant guidé notre choix vers l'approche physique est son utilisation répandue, attestée par de nombreuses publications. Elle est l'approche privilégiée pour la déformation des maillages triangulaires [HG93; LM99; PMT01] et simples [Del99; MD05].

Comme nous l'avons vu dans l'état de l'art, le principe général de la méthode physique est de modifier itérativement les coordonnées des sommets par applications de forces (quantités vectorielles) plutôt que par recherche du minimum d'une énergie (quantité scalaire). Elle ne part pas d'une fonctionnelle d'énergie à minimiser mais d'une équation aux dérivées partielles (EDP) qui régit le mouvement de la surface. Dans cette section, nous établissons le lien existant entre la résolution de l'EDP de l'approche physique et la minimisation de l'énergie introduite dans l'algorithme glouton. Nous mettons en évidence la relation entre les concepts de force et d'énergie, en appréhendant les algorithmes glouton et physique comme deux approches duales. Ces travaux ont été publiés dans [MBMC06a] et [MBMC06b].

Considérons tout d'abord l'équation régissant le mouvement de la surface, qui se comporte comme un système masse-ressort. Chaque sommet est un corps indépendant soumis à une dynamique lagrangienne. Le terme dynamique implique que l'EDP dépend du temps, par l'intermédiaire de termes inertiels du premier et second ordre, respectivement la vitesse et l'accélération :

$$m_i \frac{\partial^2 \mathbf{p}_i}{\partial t^2} + \gamma_i \frac{\partial \mathbf{p}_i}{\partial t} = \mathbf{f}(\mathbf{p}_i) \quad (4.25)$$

où m_i et γ_i sont la masse et la viscosité du sommet \mathbf{p}_i . D'après ce modèle très général, chaque point de la surface peut avoir des propriétés mécaniques propres. Le vecteur $\mathbf{f}(\mathbf{p}_i)$ est la force s'appliquant au sommet \mathbf{p}_i . Lorsque l'équation 4.25 est vérifiée pour chaque sommet, la surface a atteint son état d'équilibre. Pour simplifier le modèle, on considère des masses nulles, de sorte que l'accélération n'intervient plus, et des viscosités unitaires. Un

schéma d'évolution explicite est obtenu en discrétisant la vitesse par la méthode d'Euler, avec un pas temporel Δt . Après réorganisation des termes, nous obtenons :

$$\mathbf{p}_i^{(t+1)} = \mathbf{p}_i^{(t)} + \Delta t \mathbf{f}(\mathbf{p}_i^{(t)}) \quad (4.26)$$

qui est le schéma général d'évolution. Jusqu'à présent, nous avons énoncé le principe physique sans nous attarder sur l'expression de la force $\mathbf{f}(\mathbf{p}_i)$. Elle est obligatoirement composée de forces internes régularisantes et de forces externes liant la surface Γ à l'image I . Nous formulons la force comme l'équivalent vectoriel de l'énergie introduite dans l'algorithme glouton avec les équations 3.26 et 3.67 :

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{p}_i) &= \omega_{\text{continuité}} \mathbf{f}_{\text{continuité}}(\mathbf{p}_i) + \omega_{\text{courbure}} \mathbf{f}_{\text{courbure}}(\mathbf{p}_i) \\ &+ \omega_{\text{gradient}} \mathbf{f}_{\text{gradient}}(\mathbf{p}_i) + \omega_{\text{ballon}} \mathbf{f}_{\text{ballon}}(\mathbf{p}_i) \end{aligned} \quad (4.27)$$

Tout comme pour l'énergie, à chaque terme est associé un coefficient qui pondère son importance. La notion de pas temporel peut être incluse dans les poids, leur ordre de grandeur correspondant alors à la vitesse de convergence. L'équation 4.26 se réécrit dans ce cas :

$$\mathbf{p}_i^{(t+1)} = \mathbf{p}_i^{(t)} + \mathbf{f}(\mathbf{p}_i^{(t)}) \quad (4.28)$$

Nous détaillons à présent l'expression des forces composant $\mathbf{f}(\mathbf{p}_i)$, à partir de celle de l'énergie $E(\mathbf{p}_i)$. Considérons une fonction f à valeurs réelles. La dérivée de f par rapport à un point $\mathbf{x} = (x, y, z)^T$ s'écrit :

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)^T$$

Lorsque f est définie comme une fonction de \mathbf{x} , la notation gradient est pertinente :

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = \nabla f$$

La dérivation par rapport à une quantité vectorielle étant introduite, considérons la distance euclidienne entre deux sommets $\mathbf{p}_i = (p_{x_i}, p_{y_i}, p_{z_i})^T$ et $\mathbf{p}_j = (p_{x_j}, p_{y_j}, p_{z_j})^T$:

$$\|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j\| = \sqrt{(p_{x_i} - p_{x_j})^2 + (p_{y_i} - p_{y_j})^2 + (p_{z_i} - p_{z_j})^2}$$

En dérivant par rapport à p_{x_i} , p_{y_i} et p_{z_i} , il vient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial p_{x_i}} \|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j\| &= \frac{(p_{x_i} - p_{x_j})}{\sqrt{(p_{x_i} - p_{x_j})^2 + (p_{y_i} - p_{y_j})^2 + (p_{z_i} - p_{z_j})^2}} \\ \frac{\partial}{\partial p_{y_i}} \|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j\| &= \frac{(p_{y_i} - p_{y_j})}{\sqrt{(p_{x_i} - p_{x_j})^2 + (p_{y_i} - p_{y_j})^2 + (p_{z_i} - p_{z_j})^2}} \\ \frac{\partial}{\partial p_{z_i}} \|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j\| &= \frac{(p_{z_i} - p_{z_j})}{\sqrt{(p_{x_i} - p_{x_j})^2 + (p_{y_i} - p_{y_j})^2 + (p_{z_i} - p_{z_j})^2}} \end{aligned}$$

ce qui donne, en notation vectorielle, la dérivée de la distance euclidienne :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial p_{x_i}} \|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j\| &= \left(\frac{\partial}{\partial p_{x_i}} \|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j\|, \frac{\partial}{\partial p_{y_i}} \|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j\|, \frac{\partial}{\partial z_i} \|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j\| \right)^T \\ &= \frac{\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j}{\|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j\|} \end{aligned}$$

et de la distance quadratique :

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_i} \|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j\|^2 = 2(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j)$$

Admettons que nous cherchions à déterminer \mathbf{p}_i^* , la position optimale de \mathbf{p}_i minimisant une énergie de distance $E_{\text{distance}}(\mathbf{p}_i) = \|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j\|^2$. Bien que la solution soit déterminée trivialement en posant $\mathbf{p}_i^* = \mathbf{p}_j$, le déplacement qu'il faut appliquer à \mathbf{p}_i pour minimiser $E_{\text{distance}}(\mathbf{p}_i)$ est $\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i$. Ce déplacement, qui peut être considéré comme une force, est à la constante 2 près, l'opposé de $\partial E_{\text{distance}}(\mathbf{p}_i)/\partial \mathbf{p}_i$. De ce fait, appliquer à \mathbf{p}_i un déplacement à pas réduit dans la direction $\mathbf{f}_{\text{distance}} = \mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i$ revient à exécuter une descente de gradient de $E_{\text{distance}}(\mathbf{p}_i)$:

$$\mathbf{p}_i^{(t+1)} = \mathbf{p}_i^{(t)} + \alpha \mathbf{f}_{\text{distance}}(\mathbf{p}_i) \quad \equiv \quad \mathbf{p}_i^{(t+1)} = \mathbf{p}_i^{(t)} - \frac{\alpha}{2} \nabla E_{\text{distance}}(\mathbf{p}_i) \quad (4.29)$$

Nous étendons ce principe à toutes les énergies. De façon générale, les notions de forces et d'énergies sont liées car la force est l'opposée de la dérivée spatiale de l'énergie correspondante, à une constante près :

$$\mathbf{f}(\mathbf{p}_i) = -k \frac{\partial E(\mathbf{p}_i)}{\partial \mathbf{p}_i} \quad (4.30)$$

où k est une constante réelle positive. Ainsi, en exprimant $\mathbf{f}(\mathbf{p}_i)$ conformément à ce qui vient d'être énoncé, la résolution itérative de l'équation 4.28 peut être considérée comme une descente de gradient de l'énergie $E(\mathbf{p}_i)$. En tenant compte de ces remarques, nous comparons donc les algorithmes glouton et physique en étant assurés qu'ils résolvent des problèmes équivalents.

Détaillons maintenant les termes de l'équation 4.27. Pour calculer la force liée à l'énergie de continuité, nous dérivons l'écart entre la longueur d'une arête et la distance quadratique moyenne \bar{d}^2 (définie dans l'équation 3.33 pour le contour 2D et 3.69 pour le maillage) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_i} \left\{ \left| \bar{d}^2 - \|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j\|^2 \right| \right\} &= \frac{-2(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j)(\bar{d}^2 - \|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j\|^2)}{\left| \bar{d}^2 - \|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j\|^2 \right|} \\ &= 2(\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i) \text{signe}(\bar{d}^2 - \|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j\|^2) \end{aligned}$$

Une dérivation directe de l'énergie de continuité donnerait donc :

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{\text{continuité}}(\mathbf{p}_i) &\approx -\frac{\partial E_{\text{continuité}}(\mathbf{p}_i)}{\partial \mathbf{p}_i} \\ &= \frac{1}{\text{card}(V_i)} \sum_{j \in V_i} (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j) \text{signe}(\bar{d}^2 - \|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j\|^2) \end{aligned} \quad (4.31)$$

Cependant, cette formulation présente un inconvénient. De l'écart entre la distance moyenne et la longueur de l'arête considérée, seul le signe est conservé. Le sommet \mathbf{p}_i serait donc encouragé au même déplacement quel que soit cet écart, ce qui peut mener à des instabilités. Nous utilisons plutôt :

$$\mathbf{f}_{\text{continuité}}(\mathbf{p}_i) = \frac{1}{\text{card}(V_i)} \sum_{j \in V_i} (\bar{d} - \|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j\|) \frac{\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j}{\|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j\|} \quad (4.32)$$

qui est la force interne couramment utilisée sur les maillages [HG93; LM99; VT92]. Elle est souvent désignée comme force de tension, par analogie avec les sommets reliés par des ressorts dont la longueur de repos est \bar{d} . L'amplitude de cette force augmente lorsque les ressorts sont étirés ou comprimés. Son expression est liée à une énergie par la relation suivante :

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_i} \{(\bar{d} - \|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j\|)^2\} = -(\bar{d} - \|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j\|) \frac{\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j}{\|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j\|}$$

Ce changement de formulation ne pose pas problème puisque $\left| \bar{d}^2 - \|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j\|^2 \right| = 0$ est une condition nécessaire et suffisante pour que $(\bar{d} - \|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j\|)^2 = 0$. Appliquer la force revient donc bien à minimiser $E_{\text{continuité}}$. Pour l'expression de la force de continuité sur le contour 2D, nous remplaçons le voisinage V_i par $\{i-1, i+1\}$:

$$\mathbf{f}_{\text{continuité}}(\mathbf{p}_i) = (\bar{d} - \|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{i-1}\|) \frac{\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{i-1}}{2\|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{i-1}\|} + (\bar{d} - \|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{i+1}\|) \frac{\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{i+1}}{2\|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{i+1}\|} \quad (4.33)$$

La force de courbure attire le sommet vers le barycentre de ses voisins. C'est une discrétisation de l'opérateur laplacien appliquée au maillage, comme décrit par Desbrun *et al* [DMSB99] :

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{\text{courbure}}(\mathbf{p}_i) &\approx -\frac{\partial E_{\text{courbure}}(\mathbf{p}_i)}{\partial \mathbf{p}_i} \\ &= \left(\frac{1}{\text{card}(V_i)} \sum_{j \in V_i} \mathbf{p}_j \right) - \mathbf{p}_i \end{aligned} \quad (4.34)$$

et au contour :

$$\mathbf{f}_{\text{courbure}}(\mathbf{p}_i) = \frac{\mathbf{p}_{i-1} + \mathbf{p}_{i+1}}{2} - \mathbf{p}_i \quad (4.35)$$

La force de gradient $\mathbf{f}_{\text{gradient}}$ attire les sommets vers les points où l'amplitude du gradient est élevé. Toujours dans un souci d'équivalence avec l'algorithme glouton, cette amplitude est calculée par filtrage de Sobel en 2D et de Zucker-Hummel en 3D. La dérivée spatiale pouvant être ici remplacée par l'opérateur gradient, il vient :

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{\text{gradient}}(\mathbf{p}_i) &\approx -\frac{\partial E_{\text{gradient}}(\mathbf{p}_i)}{\partial \mathbf{p}_i} \\ &= -\nabla \|\nabla I(\mathbf{p}_i)\| \end{aligned} \quad (4.36)$$

L'ensemble $\{-\nabla \|\nabla I(\mathbf{x})\|\}_{\mathbf{x} \in \mathcal{D}}$ forme un champ vectoriel calculé en tout point \mathbf{x} de coordonnées entières, avant l'application du modèle déformable. Les sommets ayant des coordonnées réelles, le vecteur $\mathbf{f}_{\text{gradient}}(\mathbf{p}_i)$ est calculé par interpolation linéaire. Enfin, pour

exprimer la force de ballon, le vecteur normal à la surface, défini au sommet \mathbf{p}_i , est directement appliqué :

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{\text{ballon}}(\mathbf{p}_i) &\approx -\frac{\partial E_{\text{ballon}}(\mathbf{p}_i)}{\partial \mathbf{p}_i} \\ &= \mathbf{n}_i \end{aligned} \tag{4.37}$$

L'approche physique est décorrélée de la paramétrisation. Nous utilisons le même processus de reparamétrisation que celui de la méthode gloutonne. Cependant, l'amplitude des déplacements $\mathbf{f}(\mathbf{p}_i)$ n'étant pas limitée ici, le critère de remaillage

$$w \leq \|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j\| \leq 2w$$

ne garantit l'absence d'intersection d'arête ou de facette triangulaire entre sommets voisins que si $\|\mathbf{f}(\mathbf{p}_i)\|$ est limitée à $w/2$. Dans l'algorithme glouton, le paramètre w contrôle simultanément l'échantillonnage du modèle, par l'intermédiaire du critère de reparamétrisation, et la largeur de la fenêtre de recherche. Il contrôle ici l'échantillonnage et le déplacement maximum des sommets. A déformation égale, les algorithmes glouton et physique vont générer des modèles échantillonnés de la même manière.

A ce stade, nous sommes en mesure de comparer les approches gloutonne et physique sur certaines propriétés théoriques. D'une part, leur complexité algorithmique est exprimable en fonction du nombre de sommets n . L'approche physique est en $O(n)$, alors que l'algorithme glouton est en $O(n \text{ card}(W))$, où $\text{card}(W)$ est la taille de l'espace de recherche. On s'attend naturellement à ce que les itérations de l'approche physique soit moins coûteuses que celles de l'algorithme glouton. Par ailleurs, la pondération des termes est différente. Dans l'algorithme glouton, les poids des énergies ont une importance relative, car ils interviennent dans une quantité qui est minimisée. L'amplitude des déplacements dépend uniquement de w . Avec une fonctionnelle incluant quatre termes d'énergies, il n'y a en réalité que trois poids à ajuster. A l'inverse, dans l'approche physique, les poids incluent la notion de pas temporel et ont une signification absolue. Leur ordre de grandeur détermine l'amplitude du déplacement. S'il est trop élevé, la force résultante risquerait de passer outre les frontières de l'objet ou de créer un phénomène d'oscillations. A l'inverse, s'il est trop petit, la convergence du modèle vers les frontières risque d'être lente. En conséquence, quatre poids doivent être réglés manuellement par l'utilisateur.

4.3.2 Ensembles de niveaux

La représentation par ensembles de niveaux décrite en section 2.1.4 est intrinsèquement différente des représentations explicites discrètes car elle modélise une surface par un ensemble de points défini de manière implicite. Nous avons choisi les ensembles de niveaux comme représentation concurrente pour plusieurs raisons. Tout d'abord, ils sont capables de modéliser des contours et des surfaces sans aucune restriction sur la géométrie et la topologie. Ils sont donc aussi libres que les représentations discrètes, si ce n'est plus, de par

leur capacité à modifier leur topologie librement. Cette modification s'effectue de manière transparente au cours de l'évolution du front. De façon générale, les ensembles de niveaux et les modèles discrets sont des représentations qui visent les mêmes applications. Par ailleurs, leur formalisme permet de décrire des surfaces de dimension quelconque, ce qui rejoint la manière dont nous avons décrit nos modèles. Enfin, il s'agit d'une implémentation moins intuitive que les modèles discrets mais néanmoins répandue, principalement en segmentation d'images 2D.

La raison souvent énoncée pour ne pas les choisir est leur coût calculatoire important, et ce surtout en segmentation 3D. Ceci est principalement dû au fait que l'on fait évoluer un front par déformation d'une fonction définie sur toute l'image. Par ailleurs, la déformation est effectuée selon une EDP qui contient des termes très calculatoires, comme la courbure. Cependant, nous souhaitons évaluer les temps de calcul induits par les ensembles de niveaux, notamment en 3D, avec une implémentation récente permettant d'accélérer leur évolution. De plus, le temps de calcul n'est pas l'unique source de comparaison avec les modèles discrets, puisque nous désirons également évaluer la qualité de la segmentation. La méthode d'ensembles de niveaux que nous présentons ici est basée sur l'approche de Shi et Karl [SK05a; SK05b]. Sa caractéristique principale est de ne pas résoudre l'EDP de façon stricte, ce qui accélère la progression du front. Enfin, une surface implicite évolue selon une fonction de vitesse. En vue de comparer des approches équivalentes, nous nous efforçons d'utiliser une fonction de vitesse analogue à l'énergie de l'algorithme glouton et à la force de l'approche physique.

Représentation

Soit ψ la fonction d'ensembles de niveaux, à valeur réelle, ayant pour support le domaine image \mathcal{D} et le domaine temporel :

$$\begin{aligned} \psi &: \mathcal{D} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{x}, t) &\longmapsto \psi(\mathbf{x}, t) \end{aligned}$$

La surface Γ est définie comme le niveau zéro de ψ , à un instant t donné :

$$\Gamma = \{\mathbf{x} \mid \psi(\mathbf{x}, t) = 0\}$$

Cette formulation est indépendante de la dimension de l'image, les modèles implicites 2D ou 3D sont donc décrits de la même manière. Dans ce qui suit, ψ désignera indifféremment la fonction qui implémente un contour 2D ou une surface 3D. Lorsqu'une formulation est propre à une dimension, nous le mentionnerons explicitement.

Habituellement, la fonction ψ est initialisée comme la distance euclidienne signée à la surface Γ . Le signe dépend de l'appartenance du point \mathbf{x} à l'intérieur ou à l'extérieur de Γ . Ici, nous choisissons que ψ soit négative à l'intérieur de Γ :

$$R_{in} = \{\mathbf{x} \mid \psi(\mathbf{x}, t) < 0\}$$

La base de l'optimisation de Shi et Karl est d'utiliser une alternative à la distance euclidienne. La valeur de ψ en un point indique le statut de ce point par rapport à la surface : à l'intérieur, à l'extérieur, sur le bord intérieur ou sur le bord extérieur. Nous introduisons deux ensembles L_{in} et L_{out} , contenant les points respectivement sur les bords intérieur et extérieur. Un point appartient à L_{in} s'il est à l'intérieur et qu'au moins un de ses voisins est à l'extérieur et inversement pour L_{out} :

$$\begin{aligned} L_{in} &= \{\mathbf{x} \mid \psi(\mathbf{x}) < 0 \text{ et } \exists \mathbf{y} \in W_1(\mathbf{x}), \psi(\mathbf{y}) > 0\} \\ L_{out} &= \{\mathbf{x} \mid \psi(\mathbf{x}) > 0 \text{ et } \exists \mathbf{y} \in W_1(\mathbf{x}), \psi(\mathbf{y}) < 0\} \end{aligned}$$

où W_1 est le voisinage défini par la norme 1 de connexité 4 en 2D et 6 en 3D :

$$W_1(\mathbf{x}) = \{\mathbf{x}_2 \in \mathcal{D} \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_2\|_1 = 1\}$$

avec $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_2\|_1 = |x - x_2| + |y - y_2|$ en 2D. Les ensembles L_{in} et L_{out} sont implémentés en listes chaînées et vérifient $L_{in} \subset R_{in}$ et $L_{out} \subset R_{out}$, comme représenté en figure 4.14. Ces ensembles constituent une bande étroite d'épaisseur unitaire. Etant données ces listes et les régions intérieure et extérieure, la fonction d'ensembles de niveaux peut prendre un nombre restreint de valeurs :

$$\psi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{x} \in L_{out} \\ -1 & \text{si } \mathbf{x} \in L_{in} \\ 3 & \text{si } \mathbf{x} \in R_{out} \text{ et } \mathbf{x} \notin L_{out} \\ -3 & \text{si } \mathbf{x} \in R_{in} \text{ et } \mathbf{x} \notin L_{in} \end{cases} \quad (4.38)$$

Définie ainsi, ψ est loin d'être une bonne approximation de la distance euclidienne signée, ce qui ne pose pas problème pour son évolution ultérieure. Elle est tout de même considérée comme continue et dérivable, afin que les quantités différentielles nécessaires à la régularisation de la surface soient calculables.

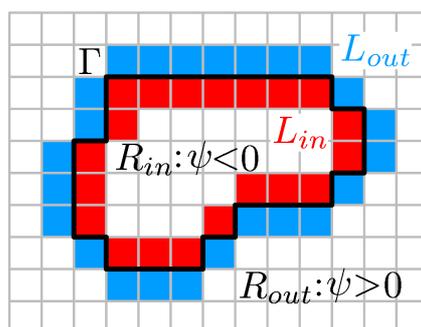


FIG. 4.14 – Listes L_{in} et L_{out} aux bords du contour 2D Γ implémenté en ensembles de niveaux

Evolution

Comme décrit à la section 2.2.6, la fonction d'ensembles de niveaux se déforme en tout point \mathbf{x} de \mathcal{D} selon l'équation d'évolution générale :

$$\frac{\partial \psi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = F(\mathbf{x}, t) \|\nabla \psi(\mathbf{x}, t)\| \quad (4.39)$$

Cette EDP régit le mouvement de ψ pour une fonction de vitesse F . Ce que nous décrivons par la suite est valable quelle que soit F . Notons pour l'instant que la fonction de vitesse contient des termes internes et externes, tout comme l'énergie ou la force vue précédemment. La méthode classique pour résoudre l'équation d'évolution est d'appliquer la méthode d'Euler, avec un pas temporel Δt . En chaque point, l'équation d'évolution explicite discrète est :

$$\psi^{(t+1)}(\mathbf{x}) = \psi^{(t)}(\mathbf{x}) + \Delta t F^{(t)}(\mathbf{x}) \|\nabla \psi^{(t)}(\mathbf{x})\| \quad (4.40)$$

Lorsque la vitesse F est négative, $\|\nabla \psi\|$ étant une quantité positive, la valeur de ψ diminue localement, ce qui a pour effet de dilater la surface au point considéré. A l'inverse, la surface se rétracte si $F > 0$. La complexité de cette méthode est directement fonction de la taille de l'image, ce qui rend la méthode coûteuse en temps de calcul si l'équation d'évolution est implémentée telle quelle. Tous les points changent progressivement de valeur et le front évolue lentement. Shi et Karl énoncent que cette modification progressive des valeurs de ψ n'est pas nécessaire pour la segmentation. D'une part, seuls les points voisins du front sont concernés par l'évolution. D'autre part, comme ψ est désormais réduite à un nombre restreint de valeurs, une modification progressive de ψ n'est plus applicable.

Au lieu d'utiliser la vitesse F pour mettre à jour la valeur de $\psi(\mathbf{x})$ comme dans l'équation 4.40, seul le signe de F est pris en compte. A chaque itération, F n'est calculée que pour les points de L_{in} et L_{out} . Ainsi, les points de L_{out} passent dans L_{in} si $F < 0$, tandis que les points de L_{in} passent dans L_{out} si $F > 0$. Leur valeur est affectée à 1 ou -1 selon le cas. La région est ensuite mise à jour, de façon à ce qu'un point de L_{in} en soit enlevé s'il n'a aucun voisin dans L_{out} , et inversement. De cette façon, les voxels changent rapidement de statut, et le front évolue de manière accélérée. La procédure SwitchIn passe un point \mathbf{x} de L_{out} dans L_{in} . Ses voisins qui étaient des points extérieurs deviennent membres de L_{out} :

SwitchIn(\mathbf{x})

$L_{out} \leftarrow L_{out} \setminus \{\mathbf{x}\}$

$L_{in} \leftarrow L_{in} \cup \{\mathbf{x}\}$

$\psi(\mathbf{x}) \leftarrow -1$

Pour tout $\mathbf{y} \in W_1(\mathbf{x})$ tel que $\psi(\mathbf{y}) = 3$ faire

$L_{out} \leftarrow L_{out} \cup \{\mathbf{y}\}$

$\psi(\mathbf{y}) \leftarrow 1$

FinPour

La procédure SwitchOut passe un point \mathbf{x} de L_{in} dans L_{out} . Ses voisins qui étaient des points intérieurs deviennent membres de L_{in} :

```

SwitchOut( $\mathbf{x}$ )
 $L_{in} \leftarrow L_{in} \setminus \{\mathbf{x}\}$ 
 $L_{out} \leftarrow L_{out} \cup \{\mathbf{x}\}$ 
 $\psi(\mathbf{x}) \leftarrow 1$ 
Pour tout  $\mathbf{y} \in W_1(\mathbf{x})$  tel que  $\psi(\mathbf{y}) = -3$  faire
     $L_{in} \leftarrow L_{in} \cup \{\mathbf{y}\}$ 
     $\psi(\mathbf{y}) \leftarrow -1$ 
FinPour

```

L'évolution globale du front comporte une phase d'évolution extérieure et une phase d'évolution intérieure. Ainsi, le contour peut se dilater par endroits et se rétracter à d'autres, selon les échanges de points réalisés entre L_{in} dans L_{out} . L'algorithme complet est décrit ci-dessous :

```

Evolution des ensembles de niveaux
TantQue Critère d'arrêt non vérifié faire
    // Evolution extérieure
    Pour tout  $\mathbf{x} \in L_{out}$  faire
        Si  $F(\mathbf{x}) < 0$  alors
            SwitchIn( $\mathbf{x}$ )
        FinSi
    FinPour

    // Elimine les redondances dans  $L_{in}$ 
    Pour tout  $\mathbf{x} \in L_{in}$  faire
        Si  $\forall \mathbf{y} \in W_1(\mathbf{x}), \psi(\mathbf{y}) < 0$  alors
             $L_{in} \leftarrow L_{in} \setminus \{\mathbf{x}\}$ 
             $\psi(\mathbf{x}) \leftarrow -3$ 
        FinSi
    FinPour

    // Evolution intérieure

```

```

Pour tout  $\mathbf{x} \in L_{in}$  faire
  Si  $F(\mathbf{x}) > 0$  alors
    SwitchOut( $\mathbf{x}$ )
  FinSi
FinPour

// Elimine les redondances dans  $L_{out}$ 
Pour tout  $\mathbf{x} \in L_{out}$  faire
  Si  $\forall \mathbf{y} \in W_1(\mathbf{x}), \psi(\mathbf{y}) > 0$  alors
     $L_{out} \leftarrow L_{out} \setminus \{\mathbf{x}\}$ 
     $\psi(\mathbf{x}) \leftarrow 3$ 
  FinSi
FinPour
FinTantQue

```

Lorsque les listes L_{in} et L_{out} ne peuvent plus évoluer, nous considérons que la fonction d'ensembles de niveaux a atteint son état d'équilibre. Le critère d'arrêt est le suivant :

$$F(\mathbf{x}) \leq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in L_{out} \quad \text{et} \quad F(\mathbf{x}) \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in L_{in} \quad (4.41)$$

La complexité algorithmique de l'évolution s'exprime en fonction de la taille des listes de points appartenant au bord, en $O(\text{card}(L_{in} \cup L_{out}))$, à opposer aux complexités en $O(n)$ des approches basées sur les modèles discrets. Le nombre de sommets n est en général très inférieur à la taille des deux listes réunies, même si le contour ou le maillage sont échantillonnés par pas unitaire.

Fonction de vitesse

La fonction de vitesse F que nous utilisons peut être considérée comme une adaptation de l'énergie ou de la force de notre modèle explicite à une représentation en ensembles de niveaux, sans toutefois s'éloigner des fonctions de vitesse habituelles. La vitesse comporte un terme régularisant, un terme externe basé contour et un terme s'apparentant à une force de ballon :

$$F(\mathbf{x}) = \omega_{\text{courbure}} F_{\text{courbure}}(\mathbf{x}) + \omega_{\text{gradient}} F_{\text{gradient}}(\mathbf{x}) + \omega_{\text{ballon}} F_{\text{ballon}}(\mathbf{x}) \quad (4.42)$$

Les termes sont pondérés de la même manière que précédemment. La première différence notable avec les termes d'évolution du modèle discret est l'absence de continuité. En effet, la régularisation est assurée par l'unique terme interne F_{courbure} . Rappelons que l'énergie ou la force de continuité intervient sur l'homogénéisation de l'échantillonnage du contour

ou de la surface, ce qui n'a pas de sens sur un modèle implicite échantillonné sur une grille régulière. Le terme régularisant est la courbure de la fonction ψ :

$$F_{\text{courbure}}(\mathbf{x}) = \kappa(\mathbf{x}) \quad (4.43)$$

L'expression de la courbure implicite 2D est donnée à l'équation 2.80. Comme il sera détaillé au chapitre suivant, une surface 3D a différentes courbures : moyenne, gaussienne, normale, principale... Une définition des courbures moyenne et gaussienne sur une surface implicite 3D peut être trouvée dans [ZSSD99]. Nous utilisons la courbure moyenne, définie à l'équation 2.81.

Le terme de ballon F_{ballon} doit pousser la surface à se dilater ou se rétracter, selon le signe du poids ω_{ballon} . Pour faire le lien avec notre modèle discret, nous souhaitons qu'un poids négatif pousse la surface à se dilater. Comme il a été décrit en section 2.2.6, appliquer la vitesse F à ψ revient à appliquer le déplacement $F\mathbf{n}$ à Γ , car la surface se déplace toujours dans sa direction normale. En affectant à F_{ballon} une constante positive, nous retrouvons l'équivalent d'une force de ballon. Nous posons :

$$F_{\text{ballon}}(\mathbf{x}) = 1 \quad (4.44)$$

Avant de décrire le terme de gradient F_{gradient} , considérons la fonction de vitesse proposée par Malladi *et al* [MSV95] et reprise dans la plupart des approches par ensembles de niveaux basés contour :

$$F(\mathbf{x}) = g(\|\nabla I(\mathbf{x})\|)(\rho\kappa(\mathbf{x}) - \nu) \quad (4.45)$$

avec

$$g(x) = \frac{1}{1+x} \quad \text{ou} \quad g(x) = \exp(-x)$$

de sorte que la vitesse est proche de 0 lorsque le point est un contour et proche de 1 sinon. De cette manière, la fonction d'ensembles de niveaux voit sa vitesse s'annuler lorsqu'elle rencontre un contour. La constante ν pousse le front à se rétracter ou se dilater selon son signe et est équivalente à $\omega_{\text{ballon}}F_{\text{ballon}}$, tandis que ρ pondère la courbure relativement à ν . En utilisant l'évolution de Shi et Karl, nous ne pouvons utiliser une vitesse de cette forme, car nous ne conservons de F que son signe. En effet, en admettant que la courbure demeure faible en valeur absolue, $g(\|\nabla I(\mathbf{x})\|)$ étant positif, l'évolution sera uniquement guidée par le signe de ν . Sur un contour de l'image, $g(\|\nabla I(\mathbf{x})\|)$ devient proche de 0 mais jamais nul. Un contour, aussi fort soit-il, ne bloquera pas l'avancement du front. Pour éviter ce phénomène, nous additionnons les termes de gradient et de ballon plutôt que de les multiplier.

En outre, lorsque nous choisissons de dilater la surface en posant $\omega_{\text{ballon}} < 0$, nous souhaitons que F_{gradient} soit élevée si $\|\nabla I(\mathbf{x})\|$ est grand, pour entraîner $F > 0$ et ainsi empêcher la surface de se dilater. A l'inverse, lorsque nous rétractons la surface avec $\omega_{\text{ballon}} > 0$, nous souhaitons que F_{gradient} soit très inférieure à 0 si $\|\nabla I(\mathbf{x})\|$ est grand, pour entraîner $F < 0$

et empêcher la surface de se rétracter. Le terme F_{gradient} doit donc induire un comportement différent selon le signe de ω_{ballon} , de façon à ce que $\|\nabla I(\mathbf{x})\|$ aille systématiquement à l'encontre de F_{ballon} . Pour cela, nous écrivons :

$$F_{\text{gradient}}(\mathbf{x}) = -\text{signe}(\omega_{\text{ballon}}) \|\nabla I(\mathbf{x})\| \quad (4.46)$$

ce qui pousse F_{gradient} à s'opposer à F_{ballon} .

Remarquons enfin qu'au delà d'une rapidité accrue, la méthode de Shi et Karl a l'avantage de ne pas introduire de pas temporel dans l'évolution. Comme nous ne considérons que le signe de la fonction de vitesse, l'ordre de grandeur des poids n'a pas d'influence sur la rapidité de déformation du front. Les poids ont une importance relative, comme dans l'algorithme glouton.

4.4 Expérimentations

4.4.1 Paramétrage

Dans ce qui suit, les algorithmes gloutons désignent la version initiale de la méthode ainsi que ses améliorations. Par souci de concision, nous utilisons les abbréviations suivantes :

- AG : Algorithme Glouton (version initiale)
- AGFD : Algorithme Glouton à Fenêtre Décalée
- AGRL : Algorithme Glouton à Recherche Linéaire
- AGFN : Algorithme Glouton à Fenêtre Normale

Nous avons réalisé une série de tests sur une base comprenant des images synthétiques et réelles. Les données synthétiques sont construites par incrustation de formes géométriques (sphère, ellipsoïde, cylindre, section de cône, ...) dans un fond uniforme, comme le montre l'exemple de la figure 4.15. Les images sont ensuite dégradées par un bruit artificiel puis lissées, de sorte que les frontières obtenues s'apparentent à celles rencontrées dans des données réelles. Le bruit et le filtre de lissage sont tous deux basés sur une loi gaussienne. La seule restriction que nous émettons sur le bruit est que l'on puisse toujours extraire des contours significatifs par l'application du filtre dérivatif, car l'objectif ici est avant tout d'évaluer les performances en terme de temps de calcul et non pas la capacité du modèle à segmenter des frontières dégradées. Dans cette partie, nous partons du principe que les données sont segmentables par des modèles déformables basés contour.

Les temps de calculs ne doivent cependant pas être réduits au détriment de la qualité de segmentation, ce qui implique un compromis entre rapidité et précision. Dans le cas

des modèles déformables, ce compromis est ajustable via les valeurs des poids associés aux énergies. Nous avons déterminé un jeu de paramètres conduisant à des segmentations satisfaisantes sur l'ensemble des images de la base. Les poids associés aux termes dans les différentes méthodes ont été déterminés grâce à un plan d'expérience. Le réglage moyen pour les algorithmes gloutons, est le suivant :

$$\begin{aligned} \omega_{\text{continuité}} &= 0.2 & \omega_{\text{courbure}} &= 1 \\ \omega_{\text{gradient}} &= 1 & \omega_{\text{ballon}} &= \pm 0.15 \end{aligned}$$

sauf pour l'AGFN dans lequel l'énergie de continuité n'est pas utilisée. Pour l'approche physique, nous choisissons :

$$\begin{aligned} \omega_{\text{continuité}} &= 0.05 & \omega_{\text{courbure}} &= 0.1 \\ \omega_{\text{gradient}} &= 0.5 & \omega_{\text{ballon}} &= \pm 0.05 \end{aligned}$$

Par ailleurs, les poids du modèle implicite basé sur les ensembles de niveaux sont :

$$\omega_{\text{courbure}} = 0.25 \quad \omega_{\text{gradient}} = 1 \quad \omega_{\text{ballon}} = \pm 0.5$$

4.4.2 Images synthétiques

Le tableau 4.1 présente en détail les résultats obtenus sur l'image des ellipsoïdes de taille $200 \times 200 \times 200$, dont une coupe apparaît dans la séquence de la figure 4.15. Les temps de calculs sont exprimés en secondes tandis que les mesures H et H_{mean} correspondent à des distances en voxels. Ces résultats sont représentatifs de ceux obtenus sur l'ensemble de la base. La configuration initiale de la surface est la même pour toutes les méthodes, que ce soient celles basées sur le maillage ou sur les ensembles de niveaux. Nous initialisons systématiquement la surface en une sphère dont le centre et le rayon sont identiques pour chaque test sur une image donnée. Dans l'exemple des ellipsoïdes, la surface est initialisée autour de l'objet d'intérêt. Le poids d'énergie ballon est positif afin que la surface se rétracte.

Le paramètre w , qui contrôle l'échantillonnage et la taille de l'espace de recherche, a une incidence majeure sur les performances. Concernant les temps de calcul, la taille de l'espace de recherche des algorithmes gloutons augmente avec w . Parallèlement, le nombre d'itérations nécessaires ainsi que la quantité de sommets diminuent. Dans l'AG, l'AGFD et l'AGRL, cette diminution ne compense pas le surcoût induit par l'espace de recherche, dont la taille est facteur de w^3 . Seul l'AGFN, dont la taille de l'espace de recherche croît linéairement par rapport à w , tire profit de cette augmentation. L'approche physique bénéficie également de la réduction du nombre de sommets. Le paramètre w influe également de manière significative sur la finesse du maillage et par conséquent sur la qualité de la segmentation. Quelle que soit la méthode considérée, hormis les ensembles de niveaux, la diminution de la finesse du maillage due à une augmentation de w dégrade la qualité de la

Méthode		Itérations	Temps (s)	H_{mean}	H
AG	$w = 3$	98	3.59	0.53	1.41
	$w = 5$	62	5.49	0.71	2.44
	$w = 7$	50	7.25	0.96	4.12
AGFD	$w = 5$	39	4.50	0.72	3.00
	$w = 7$	37	5.95	0.97	4.69
AGRL	$w = 3$	39	2.51	0.54	1.73
	$w = 5$	31	3.84	0.73	3.46
	$w = 7$	34	5.08	0.98	5.19
AGFN	$w = 3$	102	1.76	0.51	1.41
	$w = 5$	65	0.72	0.68	2.44
	$w = 7$	55	0.36	0.91	4.12
Approche physique	$w = 3$	421	9.69	0.52	1.73
	$w = 5$	401	7.90	0.74	3.00
	$w = 7$	382	6.46	0.94	4.69
Ensembles de niveaux		120	36.01	1.02	3.0

TAB. 4.1 – Comparaison des méthodes d'évolution sur l'images des ellipsoïdes

segmentation. La figure 4.16 illustre ce phénomène. Un maillage dont l'échantillonnage est grossier tronque obligatoirement les zones courbées de l'objet. Il ne peut donc reconstruire correctement les structures anguleuses, ce que révèlent les mesures de distances.

Parmi les améliorations de l'algorithme glouton, l'AGFN est celle qui fournit l'accélération la plus notable à w égal, sans dégradation de la segmentation. Les mesures de Hausdorff présentées sont celles obtenues avec le lissage tangentiel. Comme le montre la figure 4.16, le mécanisme est nécessaire à l'AGFN pour que celui-ci génère des maillages topologiquement correct. Sans lissage, le maillage présente de nombreuses intersections de facettes triangulaires, particulièrement visibles en 4.16f. Concernant les autres extensions de l'AG, le surcoût entraîné par le décalage dans l'AGFD et le calcul de la ligne de recherche dans l'AGRL constituent un handicap. L'accélération est donc moins significative qu'avec l'AGFN, malgré la réduction du nombre d'itérations.

Le mécanisme de détection des sommets stabilisés décrit en section 4.2.2 permet l'accélération de l'AGFN en ne traitant que les sommets en mouvement. Or, l'image des ellipsoïdes se prête peu à l'application de cette technique, car la distance parcourue par les sommets de leur point de départ jusqu'à leur position d'arrivée est relativement homogène. Le gain de vitesse n'est pas significatif sur ce type de données. L'image de la spirale, dont la reconstruction 3D est représentée en figure 4.17, est un exemple de données sur lequel la détection des sommets stabilisés est efficace.

La surface est ici initialisée à l'intérieur de l'objet et dilatée par le biais de l'énergie bal-

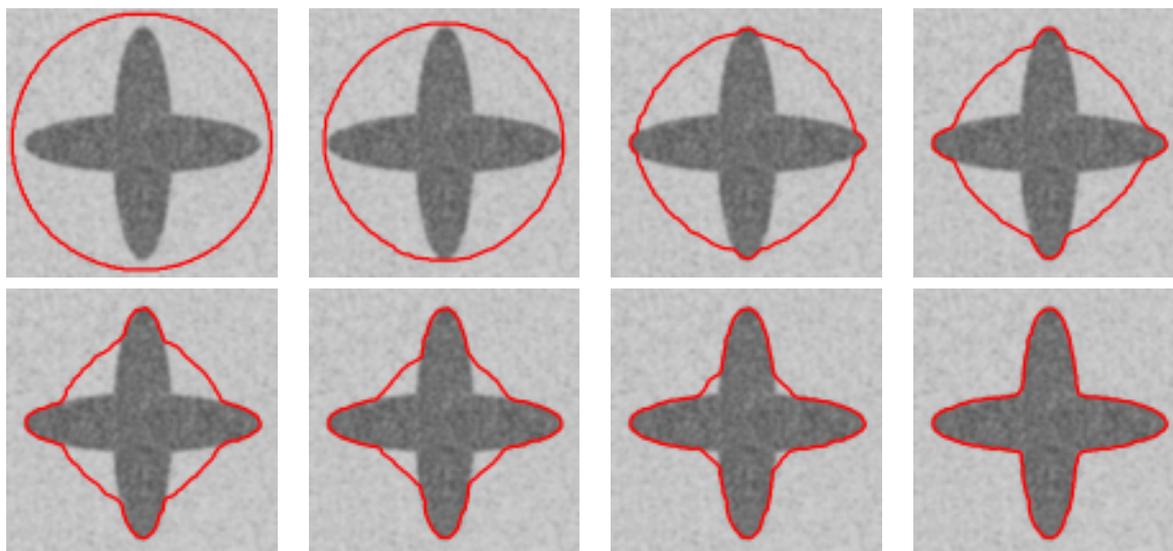


FIG. 4.15 – Segmentation de l'image des ellipsoïdes par rétractation de la surface (vue en coupe 2D)

lon. Comme le maillage croît dans la structure tubulaire, de nombreux sommets atteignent les parois avant d'autres, si bien que seule une faible proportion de sommets est en mouvement à un instant donné. Pour un temps de calcul d'environ 10.75 s avec l'AG initial, nous avons obtenu 3.57 s avec l'AGFN et 0.89 s avec l'AGFN munie de la détection des sommets stabilisés, ce qui correspond à un gain de vitesse d'un facteur égal à 4. Ces durées ont été observées avec l'échantillonnage le plus fin ($w = 3$). Le nombre de positions précédentes T utilisé pour le calcul du déplacement moyen (équation 4.2.2) influence la détection des sommets stabilisés. Le gain de vitesse tend à décroître lorsque T augmente, car les sommets immobiles sont alors détectés plus tardivement. D'autre part, nous avons observé un biais dans la reconstruction pour des faibles valeurs de T . Si l'on ne considère par exemple que 5 positions, les sommets sont immobilisés prématurément et l'ajustement aux données est alors dégradé. Nous avons déterminé expérimentalement que considérer $T = 20$ positions permettait d'obtenir le gain de vitesse cité précédemment sans dégradation des résultats.

La complexité élevée des ensembles de niveaux est reflétée par le temps de calcul, environ dix fois supérieur à celui des approches basées sur le maillage triangulaire, et ce malgré la méthode d'évolution accélérée de Shi et Karl. Par ailleurs, l'ajustement aux données est moins précis avec les ensembles de niveaux. Il existe néanmoins des cas particuliers pour lesquels ils mènent à une qualité de segmentation supérieure. En effet, les ensembles de niveaux sont plus à même de segmenter des objets présentant des zones anguleuses, comme les bords du vase de la figure 4.18. Sur cette image, les mesures de distance obtenues avec le maillage, qu'il soit déformé par algorithme glouton ou par approche physique ($H_{\text{mean}} = 0.33$ et $H = 2.44$ dans le meilleur des cas), sont moins bonnes que celles obtenues avec la surface implicite ($H_{\text{mean}} = 0.28$ et $H = 1.41$). L'échantillonnage du maillage, obligatoirement moins

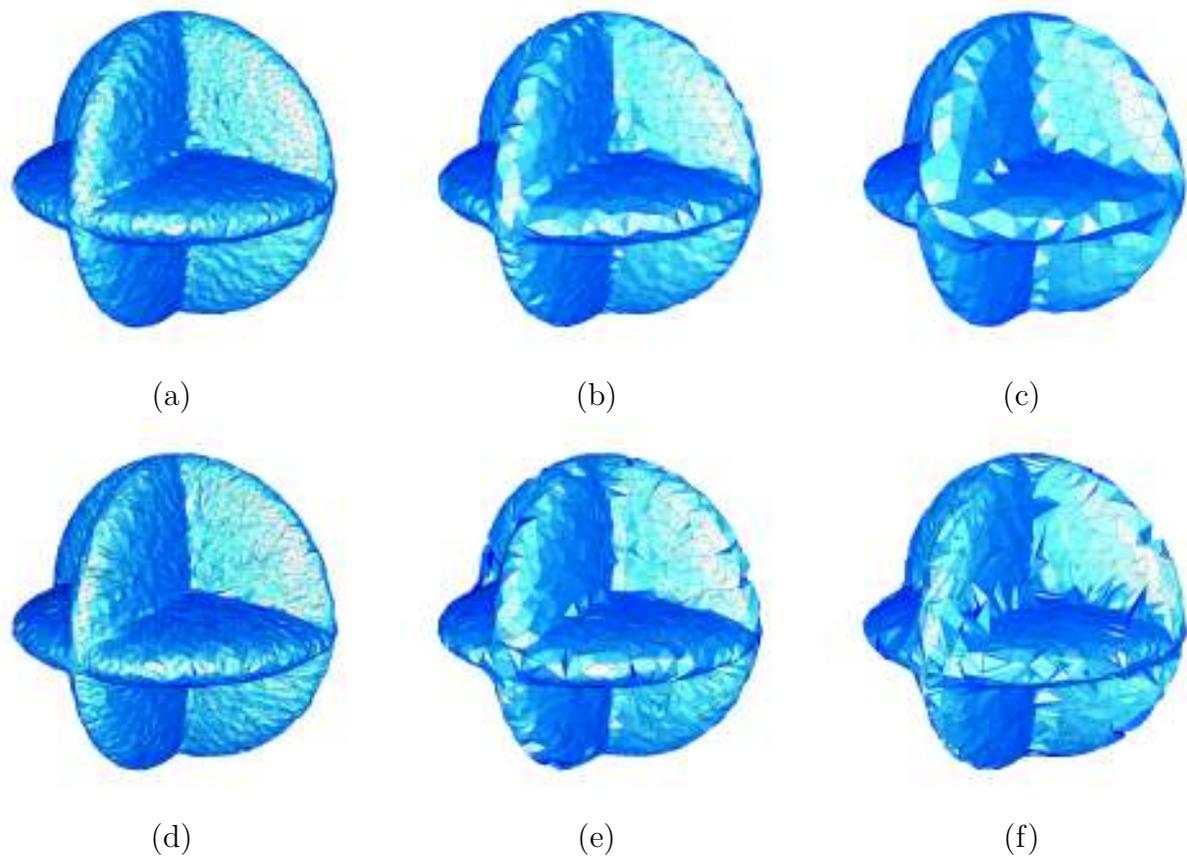


FIG. 4.16 – Segmentation de l'image des ellipsoïdes par l'AGFN avec lissage tangentiel (haut) et sans lissage tangentiel (bas). (a) $w = 3$ (b) $w = 5$ (c) $w = 7$ (d) $w = 3$ (e) $w = 5$ (f) $w = 7$

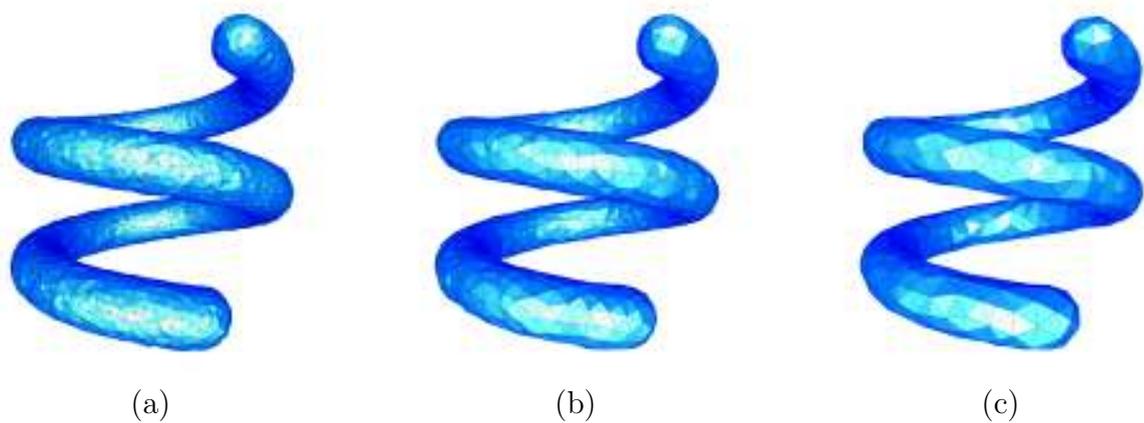


FIG. 4.17 – Evolution selon la normale avec lissage tangentiel. (a) $w = 3$ (b) $w = 5$ (c) $w = 7$

fin que celui des ensembles de niveau, provoque un arrondissement des angles, ce qui est reflété par l'erreur maximale.

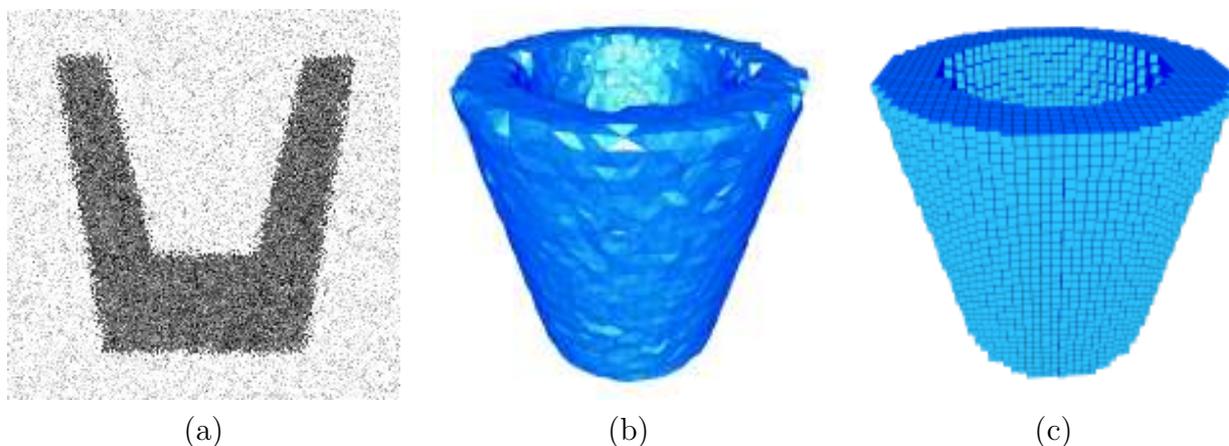


FIG. 4.18 – Segmentation de l'image du vase. (a) Coupe 2D (b) Maillage obtenu avec algorithme glouton (c) Surface voxelisée obtenue avec les ensembles de niveaux

4.4.3 Images médicales

Les résultats obtenus sur les images artificielles sont confirmés par les tests réalisés sur des données médicales. Nous nous intéressons ici à la segmentation d'images tomodensitométriques de l'abdomen obtenues par scanner à rayons X. La structure d'intérêt est ici l'aorte abdominale, dont un plan de coupe axial apparaît en figure 4.19a. La segmentation de cette artère est réalisée dans le cadre de l'étude de l'anévrisme aortique abdominal ¹. L'anévrisme, qui se traduit par une dilatation de la paroi de l'artère, doit être caractérisé à l'aide de mesures quantitatives, comme l'aire de sa section ou sa longueur. La segmentation de la zone correspondant au sang circulant constitue la première étape de l'étude quantitative de l'anévrisme. De par l'intensité élevée de cette zone due à l'injection d'un produit de contraste, des frontières significatives peuvent être extraites à l'aide du filtre de Zucker-Hummel (figure 4.19b).

Dans le tableau 4.2 figurent les résultats obtenus sur ce type d'image. A un ordre de grandeur plus élevé, nous retrouvons les temps de calcul et les distances de l'exemple précédent, dans la mesure où l'AGFN réalise toujours la segmentation la plus performante. Pour toutes les méthodes, excepté celle des ensembles de niveaux, un maillage plus fin permet une exploration plus poussée de l'arborescence vasculaire, la surface pouvant se propager dans des structures étroites. Ce principe est illustré à la figure 4.20, qui est un exemple de reconstruction 3D obtenue sur une image tomodensitométrique de résolution

¹Nous remercions à ce sujet Patrick LERMUSIAUX, responsable de l'unité de chirurgie vasculaire du CHU de Tours, qui a fourni les images 3D de l'aorte

$512 \times 512 \times 620$. Les distances correspondant à $w = 3$ sont plus faibles qu'avec $w = 5$ et $w = 7$, comme en atteste le tableau 4.2. Elles demeurent cependant élevées, les anévrismes étant partiellement segmentés. En effet, les erreurs maximales importantes traduisent le fait que la structure vasculaire n'est pas totalement explorée. Il s'agit là d'une limite inhérente aux modèles déformables basés contour.

Méthode		Itérations	Temps (s)	H_{mean}	H
AG	$w = 3$	380	17.57	2.41	14.59
	$w = 5$	243	26.88	3.24	25.27
	$w = 7$	197	35.49	4.35	42.54
AGFD	$w = 5$	155	22.04	3.26	30.96
	$w = 7$	147	29.10	4.40	48.40
AGRL	$w = 3$	152	12.30	2.46	17.87
	$w = 5$	121	18.82	3.32	35.74
	$w = 7$	137	24.84	4.46	53.62
AGFN	$w = 3$	383	7.91	2.33	14.59
	$w = 5$	255	4.39	3.12	25.27
	$w = 7$	216	2.64	4.12	42.54
Approche physique	$w = 3$	1634	47.44	2.39	17.87
	$w = 5$	1557	38.65	3.39	30.96
	$w = 7$	1482	31.63	4.28	48.40
Ensembles de niveaux		1060	202.41	2.98	32.45

TAB. 4.2 – Comparaison des méthodes d'évolution sur l'image de l'aorte

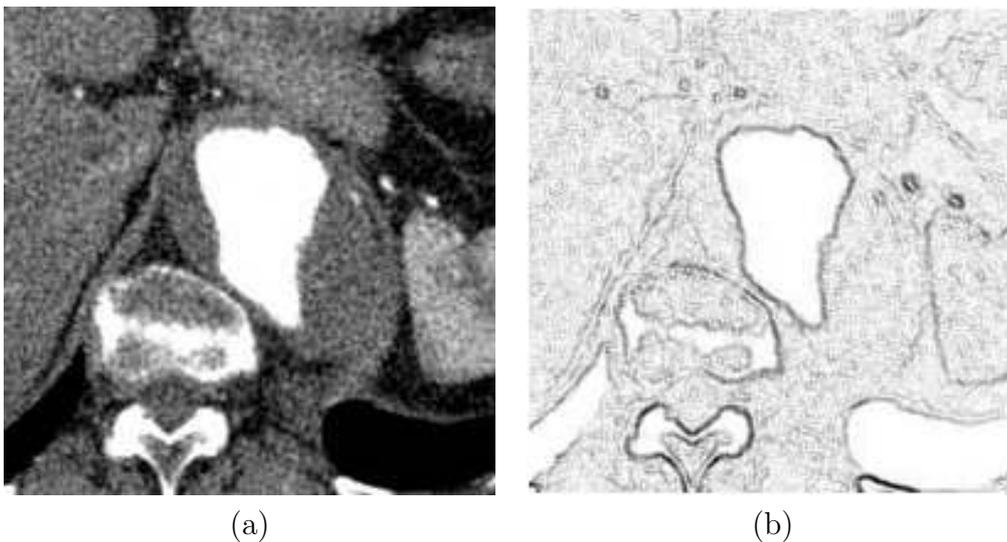


FIG. 4.19 – Coupe axiale d'une tomodensitométrie de l'abdomen où la section de l'aorte apparaît en blanc (a) Image initiale (b) Amplitude du gradient (en négatif)

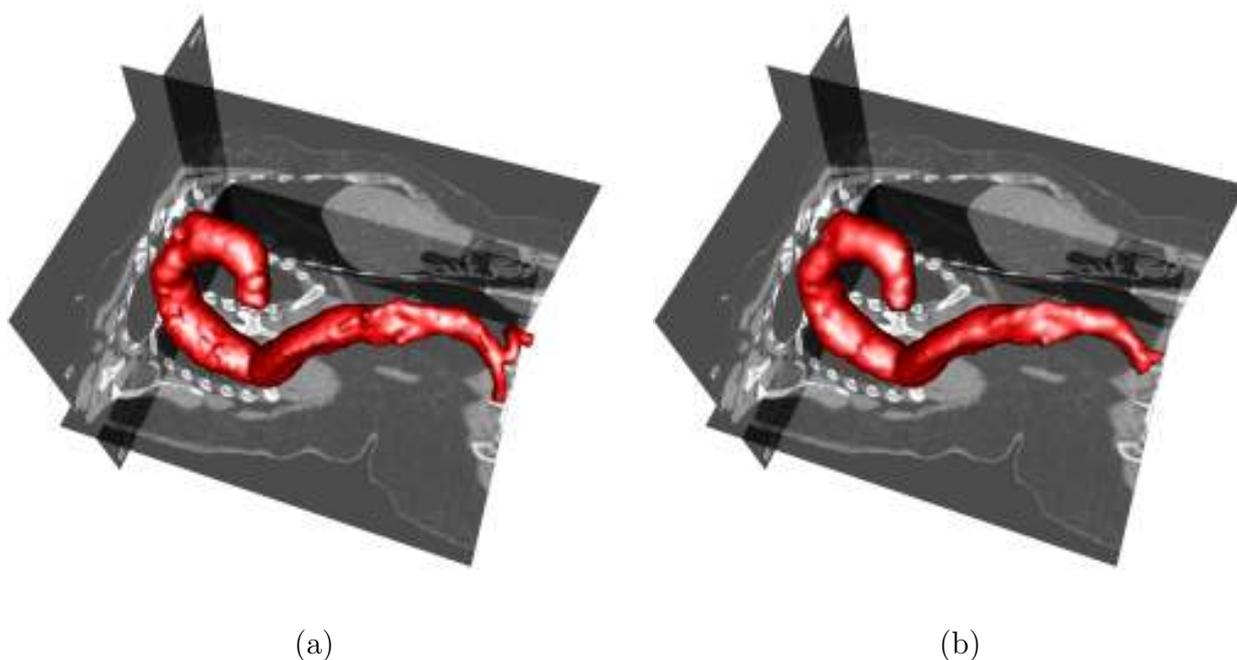


FIG. 4.20 – Reconstruction de l'aorte avec l'algorithme glouton (a) $w = 3$ (b) $w = 5$

4.5 Discussion

Nous avons proposé dans ce chapitre des algorithmes d'accélération de l'approche gloutonne pour la déformation de notre modèle de surface active. Nos méthodes ont été confrontées avec d'autres approches à la fois sur des critères de représentation et d'évolution.

Concernant la représentation, notre modèle explicite se révèle pertinent pour la segmentation 3D. Devant l'important volume de données à traiter, une méthode de faible complexité algorithmique est préférable. Nous pensons que lorsque la topologie des structures 3D est connue, les maillages sont à privilégier aux ensembles de niveaux. Concernant l'évolution, l'algorithme glouton à fenêtre normale permet une très nette accélération. Toutefois, la supériorité des méthodes explicites concernant les coûts calculatoires doit être nuancée. Pour être totalement impartiale, la comparaison devrait être effectuée sur des représentations ayant les mêmes aptitudes. Pour cela, il serait intéressant d'étudier les temps de calculs engendrés par des maillages à topologie adaptative, comme dans les travaux de Lachaud et Montanvert [LM99] ou de McInerney et Terzopoulos [MT99]. Les mécanismes de changement de topologie ont un coût non négligeable, que nous souhaiterions évaluer. Il s'agit d'une des perspectives de ces travaux.

Concernant l'évolution, les différentes méthodes d'accélération proposées ont été testées. L'algorithme glouton à fenêtre normale s'est révélé comme étant le plus efficace en terme

de vitesse. Il permet de réduire significativement les temps de calcul sans dégradation de la précision par rapport à la vérité terrain, c'est pourquoi nous l'utilisons dans les travaux décrits aux chapitres suivants.

Chapitre 5

Energie de région en bande étroite

Les énergies externes, dont le rôle est de lier le modèle déformable aux données image, sont généralement classées en deux catégories : les termes de contour et les termes de région. Les premiers modèles déformables étaient essentiellement basés contour. Jusqu'à présent, nous avons nous même décrit des modèles et proposé des améliorations relatives à une approche contour, en liant notre modèle à l'image avec un terme de gradient. Cependant, le modèle déformable uniquement basé sur le gradient d'intensité est tributaire de la méthode de détection de contour. Celle-ci étant par nature locale, elle souffre d'une grande sensibilité au bruit et ne peut extraire des contours fiables lorsque les frontières entre les structures voisines sont mal définies.

Dans les modèles déformables, la fonction image ou ses dérivées ne sont pas considérées seulement sur le contour ou la surface, mais sur l'ensemble du ou des domaine(s) délimité(s). Dans la plupart des cas, la surface sépare l'image en une région intérieure et une région extérieure. L'énergie de région associée à la surface est le plus souvent un critère d'homogénéité calculé soit uniquement sur la région intérieure soit sur les deux régions. Ce critère dépend de statistiques globales sur l'intensité de l'image : moyenne, variance, histogramme... Les énergies de région permettent d'améliorer la prise en compte des données lorsque l'information de frontière est insuffisante. Elles sont également moins sensibles au bruit que les approches contour. Lorsqu'un objet d'intérêt se démarque du reste de l'image par des caractéristiques globales (intensité, histogramme, texture...), l'emploi d'une énergie de région dans l'évolution du modèle déformable est pertinent. L'énergie de région permet également de s'affranchir de l'énergie ballon, car le modèle peut se dilater ou se rétracter en fonction du critère d'homogénéité et est donc moins sensible à l'initialisation. Enfin, les termes de contour et de région ne sont pas incompatibles et peuvent être combinés dans une fonctionnelle d'énergie.

Cependant, les termes de région souffrent de deux inconvénients majeurs. D'une part, ils soulèvent des problèmes liés à l'implémentation sur les représentations explicites des

contours et des surfaces. A l'inverse des énergies de type gradient qui s'expriment comme des intégrales de contour en 2D et des intégrales de surface en 3D, les énergies de région s'expriment comme des intégrales doubles ou triples sur les domaines délimitées par le contour ou la surface. Sur les contours et surfaces explicites dont nos modèles font partie, la difficulté est de déterminer si un pixel appartient à la région intérieure ou extérieure, ce qui implique l'utilisation d'un algorithme de remplissage. Une alternative consiste à employer les théorèmes de Green-Riemann et Green-Ostrogradski (ou théorème de flux-divergence), qui permettent de transformer les intégrales de régions et ainsi d'obtenir des expressions mathématiques plus propices à leur implémentation, ce qui n'est pas sans poser de problèmes de coût mémoire. D'autre part, les énergies de région classiques supposent l'admission d'hypothèses très contraignantes sur les intensités des régions. Le modèle développé par Chan et Vese [CV01], dont nous nous inspirons par la suite, est basé sur le principe de la variance minimale d'intensité. Il repose donc sur l'hypothèse d'uniformité des régions. En imagerie médicale, ce type de modèle est limité, car il arrive bien souvent que le fond ne soit pas uniforme. L'homogénéité des régions n'est pas nécessairement une caractéristique pertinente.

Pour remédier à ces inconvénients, nous développons dans ce chapitre un nouveau type de terme de région : l'énergie de région en bande étroite. La différence majeure avec les approches région actuelles consiste à calculer le critère région uniquement dans un voisinage du modèle déformable, et non pas sur la totalité des régions délimitées. Ce voisinage est défini par deux bandes situées de part et d'autre du contour et de la surface. Le principe de la bande étroite, utilisé à l'origine pour l'évolution des ensembles de niveaux, est ici employé pour définir un nouveau critère de segmentation. En effet, dans de nombreuses applications en imagerie médicale, la zone d'intérêt peut être segmentée par des critères région uniquement à proximité de ses frontières, justifiant ainsi le principe de bande étroite. Ainsi, notre énergie de région combine des caractéristiques globales et locales. Dans ce chapitre, nous développons une version "bande étroite" de l'énergie de région de Chan et Vese [CV01]. Nous proposons une approximation mathématique du terme de région en bande étroite, qui permet une implémentation aussi bien sur le contour 2D que sur la surface 3D, sans utiliser les méthodes citées au paragraphe précédent. Cette approximation est notamment basée sur la théorie des courbes et surfaces parallèles [Gra97]. Nous étudions ensuite la minimisation de notre énergie de région, en utilisant les concepts fondamentaux du calcul variationnel : la dérivation fonctionnelle et l'équation d'Euler-Lagrange. A partir du calcul des variations de l'énergie de région, nous dérivons une énergie discrète, que nous incorporons alors dans l'algorithme glouton à fenêtre normale développé au chapitre précédent. Finalement, l'approche est validée par une série de tests en imagerie médicale 2D et 3D, en considérant plusieurs modalités d'acquisition (scanner, résonance magnétique, ultrasons). Nous la comparons avec une approche région classique implémentée avec les ensembles de niveaux. Les publications [MBMC07a] et [MBMC07b] présentent nos travaux sur l'énergie de région en bande étroite.

5.1 Energie de région sur le modèle de contour

5.1.1 Difficultés

Le contour Γ sépare le domaine image \mathcal{D} en deux domaines disjoints qui sont les régions intérieure R_{in} et extérieure R_{out} . Comme nous l'avons présenté en section 2.3.2, une énergie de région s'exprime en fonction d'intégrales de la fonction image I sur les domaines R_{in} et R_{out} . Son expression générale est :

$$E_{\text{région}}(\Gamma) = g \left(\iint_{\mathbf{x} \in R_{in}} g_{in}(I(\mathbf{x})) d\mathbf{x}, \iint_{\mathbf{x} \in R_{out}} g_{out}(I(\mathbf{x})) d\mathbf{x} \right) \quad (5.1)$$

où les fonctions g_{in} et g_{out} sont les descripteurs sur les régions respectives R_{in} et R_{out} , tandis que g combine les termes sur les deux régions. Avant d'aller plus loin, nous aurons besoin d'exprimer les aires des régions :

$$\mathcal{A}(R_{in}) = \iint_{\mathbf{x} \in R_{in}} d\mathbf{x} \quad \mathcal{A}(R_{out}) = \iint_{\mathbf{x} \in R_{out}} d\mathbf{x} \quad (5.2)$$

Il n'y a *a priori* pas de restriction quant au choix des fonctions g_{in} , g_{out} et g . Elles doivent être formulées en fonction des caractéristiques recherchées dans l'image, en gardant à l'esprit que nous souhaitons minimiser $E_{\text{région}}$. Le plus souvent, elles mettent en œuvre un critère d'homogénéité, faisant intervenir des statistiques globales, comme la moyenne ou la variance des niveaux de gris. Par exemple, en choisissant :

$$\begin{aligned} g(\alpha, \beta) &= \frac{1}{\mathcal{A}(R_{in})} \alpha \\ g_{in}(\lambda_1) &= \lambda_1 \\ g_{out}(\lambda_2) &= 0 \end{aligned}$$

nous cherchons à minimiser l'intensité moyenne à l'intérieur du contour. Ce terme pourrait être utilisé pour rechercher des objets sombres dans un fond clair. D'autre part, en choisissant :

$$\begin{aligned} g(\alpha, \beta) &= - \left| \frac{1}{\mathcal{A}(R_{in})} \alpha - \frac{1}{\mathcal{A}(R_{out})} \beta \right| \\ g_{in}(\lambda_1) &= \lambda_1 \\ g_{out}(\lambda_2) &= \lambda_2 \end{aligned}$$

nous cherchons à maximiser la différence des intensités moyennes entre l'intérieur et l'extérieur du contour. De cette façon, il est possible de développer de nombreux termes de région selon l'application visée.

Nous considérons l'énergie de région du modèle de Chan et Vese [CV01], dont nous nous inspirons par la suite pour développer notre énergie de région. Etant données $\mu(R_{in})$

et $\mu(R_{out})$ les intensités moyennes respectives des régions,

$$\mu(R_{in}) = \frac{1}{\mathcal{A}(R_{in})} \iint_{R_{in}} I(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad \mu(R_{out}) = \frac{1}{\mathcal{A}(R_{out})} \iint_{R_{out}} I(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (5.3)$$

l'énergie de Chan et Vese est obtenue en choisissant $g(\alpha, \beta) = \alpha + \beta$, $g_{in}(\lambda_1) = (\lambda_1 - \mu(R_{in}))^2$ et $g_{out}(\lambda_2) = (\lambda_2 - \mu(R_{out}))^2$. Elle s'exprime donc comme la somme des variances d'intensité intérieure $\sigma^2(R_{in})$ et extérieure $\sigma^2(R_{out})$:

$$\begin{aligned} E_{\text{région}}^{\text{Chan-Vese}}(\Gamma) &= \sigma^2(R_{in}) + \sigma^2(R_{out}) \\ &= \iint_{R_{in}} (I(\mathbf{x}) - \mu(R_{in}))^2 d\mathbf{x} + \iint_{R_{out}} (I(\mathbf{x}) - \mu(R_{out}))^2 d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (5.4)$$

Ainsi, l'énergie pénalise un contour dont l'intérieur et l'extérieur présenteraient chacun de grandes disparités de niveaux de gris. Nous recherchons donc une ou plusieurs zones d'intérêt uniformes dans un fond uniforme également.

La principale difficulté est l'implémentation du terme de région, qui est constitué d'une ou plusieurs intégrale(s) double(s) sur une portion de \mathbb{R}^2 . A l'inverse, un terme basé contour, comme l'énergie de gradient, s'exprime généralement comme une intégrale de contour sur Γ et est facilement implémenté. Nous introduisons la notation générale $J(f, D)$ qui désigne l'intégrale de f sur le domaine D , où f est une fonction réelle quelconque définie sur \mathbb{R}^2 . Si D est une courbe Γ , paramétrée par le vecteur position $\mathbf{c}(u) = (x(u), y(u))^T$, nous avons :

$$J(f, \Gamma) = \int_{\Omega} f(\mathbf{c}(u)) \left\| \frac{d\mathbf{c}}{du} \right\| du$$

où l'élément de longueur $\|d\mathbf{c}/du\|$ rend le terme J intrinsèque, c'est-à-dire indépendant de la paramétrisation de Γ . Notons que l'énergie de gradient comme elle est formulée à l'équation 3.17 n'est pas intrinsèque. Son influence est donc modifiée par la paramétrisation. L'idée de rendre les termes de contours intrinsèques a été formulée en premier par Caselles *et al* dans le modèle des contours actifs géodésiques [CKS97] [GKR01] [KKOY95]. Si D est une région R , nous avons :

$$J(f, R) = \iint_{\mathbf{x} \in R} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

La discrétisation de l'intégrale de contour $J(f, \Gamma)$ sur une courbe polygonale $[\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n]$ se fait naturellement, en sommant les valeurs de f aux sommets du polygone, avec discrétisation de l'élément de longueur par différence finie centrée :

$$J(f, \Gamma) \approx \sum_{i=1}^n f(\mathbf{p}_i) \left\| \frac{\mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{p}_{i-1}}{2} \right\| \quad (5.5)$$

Un terme de contour est donc facilement implémenté en un unique parcours des sommets. Il en est tout autre pour un terme de région. Dans cette optique, deux techniques principales ont été mises en œuvre pour implémenter les termes de région. La première, qui

conserve l'intégrale de région sous sa forme actuelle, consiste à déterminer tous les pixels à l'intérieur ou à l'extérieur de Γ . Cette approche est implémentée de manière très naturelle sur les représentations en ensembles de niveaux, car la fonction ψ est discrétisée sur toute l'image. L'appartenance d'un pixel \mathbf{x} à telle ou telle région est déterminée par le signe de \mathbf{x} [CV01] [DST⁺05]. Les représentations explicites comme les contours actifs polygonaux requièrent l'emploi d'algorithmes de remplissage, comme il est décrit dans [IP95]. Evidemment, ce mécanisme se fait au détriment des performances. L'algorithme de remplissage doit être exécuté périodiquement pour que les pixels de la région soient mis à jour durant la déformation. La seconde approche, employée par Chakraborty *et al* [CSD96] et Jacob *et al* [JBU04], consiste à calculer les primitives de la fonction image au préalable. Ceci nécessite de générer deux images supplémentaires contenant les intensités cumulées dans les directions respectives x et y . Une fois ces primitives calculées, le théorème de Green-Riemann permet de les utiliser dans une intégrale de contour, évitant ainsi l'implémentation d'une intégrale de domaine. Dans ce qui suit, nous décrivons de façon détaillée ce théorème et les conséquences de son utilisation.

5.1.2 Le théorème de Green-Riemann pour les contours actifs basés région

Le théorème de Green-Riemann permet de convertir une intégrale de région en une intégrale de contour. Considérons une région R , un ouvert borné de \mathbb{R}^2 , de bord ∂R . Si $(P(x, y), Q(x, y))$ est un champ vectoriel $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ continûment dérivable, le théorème s'exprime ainsi :

$$\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial R} P dx + Q dy \quad (5.6)$$

Nous reprenons ici la réflexion menée par Zhu et Yuille [ZY96] pour la transformation d'une intégrale de région dans le cadre des contours actifs. Si la frontière ∂R est paramétrée par la courbe Γ de vecteur position $\mathbf{c}(u) = (x(u), y(u))^T$, l'intégrale de contour devient :

$$\int_{\partial R_{in}} P dx + Q dy = \int_{\Omega} P \frac{dx}{du} + Q \frac{dy}{du} du$$

Pour exprimer $J(f, R)$ en intégrale de contour, nous devons alors déterminer le champ vectoriel (P, Q) tel que :

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = f(x, y)$$

En choisissant P et Q comme fonctions des primitives de f , la condition précédente est satisfaite :

$$\begin{aligned} Q(x, y) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^x f(t, y) dt \\ P(x, y) &= -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^y f(x, t) dt \end{aligned}$$

En nous basant sur cette réflexion, lorsque nous intégrerons par la suite la fonction I sur la région R_{in} , nous écrirons :

$$J(I, R_{in}) = \iint_{R_{in}} I(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{dy}{du} I^x(\mathbf{c}(u)) - \frac{dx}{du} I^y(\mathbf{c}(u)) du \quad (5.7)$$

avec :

$$I^x(x, y) = \int_{-\infty}^x I(t, y) dt \quad I^y(x, y) = \int_{-\infty}^y I(x, t) dt \quad (5.8)$$

Une implémentation directe de $J(I, R_{in})$ est alors possible sur notre contour polygonal $[\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n]$, en un seul parcours des sommets :

$$J(I, R_{in}) \approx \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{p_{y_{i+1}} - p_{y_{i-1}}}{2} \left(\sum_{k=0}^{p_{x_i}} I(k, p_{y_i}) \right) - \frac{p_{x_{i+1}} - p_{x_{i-1}}}{2} \left(\sum_{l=0}^{p_{y_i}} I(p_{x_i}, l) \right) \right\} \quad (5.9)$$

Calculer cette quantité telle quelle est assez coûteux. En effet, à chaque sommet, il est nécessaire de cumuler les intensités des pixels en x et y en partant du bord de l'image. En admettant que $J(I, R_{in})$ doive être estimée à chaque itération de l'algorithme glouton, les temps de calculs risquent d'être importants. Toutefois, il est possible de calculer et de stocker pour chaque pixel le cumul des intensités en x et y , avant l'application du modèle déformable. La complexité algorithmique est alors $O(n)$, équivalente à celle du terme de gradient.

Admettons que l'on souhaite implémenter l'énergie de région de Chan et Vese (équation 5.4) à l'aide du théorème de Green-Riemann. Le développement mathématique que nous menons ici met en relief les coûts impliqués par l'utilisation de ce théorème. Considérons tout d'abord les termes relatifs à R_{in} . L'aire $\mathcal{A}(R_{in})$ et la moyenne des intensités de R_{in} peuvent être calculées conformément à l'équation 5.9. L'aire est estimée en remplaçant I par 1 dans l'équation 5.9, tandis que la moyenne $\mu(R_{in})$ est obtenue en considérant l'équation 5.9 telle quelle et en la normalisant par l'aire. La variance $\sigma^2(R_{in})$ doit quant à elle être développée :

$$\begin{aligned} \sigma^2(R_{in}) &= \iint_{R_{in}} (I(\mathbf{x}) - \mu(R_{in}))^2 d\mathbf{x} \\ &= \iint_{R_{in}} (I(\mathbf{x}))^2 + \mu(R_{in})^2 - 2I(\mathbf{x})\mu(R_{in}) d\mathbf{x} \end{aligned}$$

En séparant les termes sur différentes intégrales et en utilisant l'équation 5.3, la variance se réécrit :

$$\begin{aligned} \sigma^2(R_{in}) &= \iint_{R_{in}} (I(\mathbf{x}))^2 d\mathbf{x} + \mu(R_{in})^2 \iint_{R_{in}} d\mathbf{x} - 2\mu(R_{in}) \iint_{R_{in}} I(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= \iint_{R_{in}} (I(\mathbf{x}))^2 d\mathbf{x} - \frac{1}{\mathcal{A}(R_{in})} \left(\iint_{R_{in}} I(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right)^2 \end{aligned}$$

Pour la région extérieure R_{out} , ces calculs ne peuvent s'effectuer directement de la même manière. En effet, le théorème de Green-Riemann n'est valable que pour intégrer une fonction sur l'intérieur d'une courbe fermée. Pour l'extérieur, nous nous basons sur le fait que $R_{out} = \mathcal{D} \setminus R_{in}$. Nous écrivons donc, pour toute fonction f :

$$\iint_{R_{out}} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \iint_{\mathcal{D}} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \iint_{R_{in}} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

Tout d'abord, la moyenne $\mu(R_{out})$ doit être transformée :

$$\mu(R_{out}) = \frac{1}{\mathcal{A}(\mathcal{D}) - \mathcal{A}(R_{in})} \left(\iint_{\mathcal{D}} I(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \iint_{R_{in}} I(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right)$$

où $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ est l'aire totale de l'image. De la même manière, nous développons la variance extérieure R_{out} :

$$\begin{aligned} \sigma^2(R_{out}) &= \iint_{\mathcal{D}} (I(\mathbf{x}) - \mu(R_{out}))^2 d\mathbf{x} - \iint_{R_{in}} (I(\mathbf{x}) - \mu(R_{out}))^2 d\mathbf{x} \\ &= \iint_{\mathcal{D}} (I(\mathbf{x}))^2 d\mathbf{x} + \mu(R_{out})^2 \iint_{\mathcal{D}} d\mathbf{x} - 2\mu(R_{out}) \iint_{\mathcal{D}} I(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &\quad - \iint_{R_{in}} (I(\mathbf{x}))^2 d\mathbf{x} - \mu(R_{out})^2 \iint_{R_{in}} d\mathbf{x} + 2\mu(R_{out}) \iint_{R_{in}} I(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= \iint_{\mathcal{D}} (I(\mathbf{x}))^2 d\mathbf{x} - \iint_{R_{in}} (I(\mathbf{x}))^2 d\mathbf{x} + \mu(R_{out})^2 \left(\iint_{\mathcal{D}} d\mathbf{x} - \iint_{R_{in}} d\mathbf{x} \right) \\ &\quad - 2\mu(R_{out}) \left(\iint_{\mathcal{D}} I(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \iint_{R_{in}} I(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right) \end{aligned}$$

L'énergie de région de Chan et Vese se réécrit donc :

$$\begin{aligned} E_{\text{région}}^{\text{Chan-Vese}}(\Gamma) &= \sigma^2(R_{in}) + \sigma^2(R_{out}) \\ &= -\frac{1}{\mathcal{A}(R_{in})} \left(\iint_{R_{in}} I(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right)^2 + \iint_{\mathcal{D}} (I(\mathbf{x}))^2 d\mathbf{x} + \mu(R_{out})^2 \left(\iint_{\mathcal{D}} d\mathbf{x} - \iint_{R_{in}} d\mathbf{x} \right) \\ &\quad - 2\mu(R_{out}) \left(\iint_{\mathcal{D}} I(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \iint_{R_{in}} I(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right) \end{aligned} \tag{5.10}$$

Les intégrales sur \mathcal{D} sont constantes et peuvent être calculées une seule fois avant la déformation. Les intégrales sur R_{in} doivent être calculées par la formule de Green-Riemann à chaque itération, d'après le modèle de l'équation 5.9. Pour une implémentation économe en temps de calcul, les primitives de I et I^2 , en x et y , doivent être calculées pour chaque

pixel avant la déformation. En plus de l'image initiale I et de l'image de gradient $\|\nabla I\|$, cette approche nécessite de stocker quatre images d'intensités cumulées. Alors que ce coût supplémentaire en espace mémoire est très raisonnable en segmentation 2D, il est plus que problématique avec des données volumétriques, comme nous le verrons plus loin avec le théorème de Green-Ostogradski. Jusqu'à présent, nous nous sommes efforcés de conserver un formalisme commun en 2D et 3D, et nous souhaitons que notre énergie de région suive ce principe. Le coût en calcul ou en espace mémoire induit par l'implémentation du terme de Chan et Vese sur notre modèle discret 3D est un des éléments déterminants qui nous ont encouragés à développer notre énergie de région. La formulation de celle-ci n'est pas basée sur le théorème de Green-Riemann, cependant ce dernier sera utilisé pour le calcul des variations de l'énergie.

5.1.3 Notre énergie de région : principe de la bande étroite

Outre les difficultés d'implémentation qu'elles suscitent sur les modèles déformables explicites, les énergies de région que nous avons décrites à la section 2.3.2 [CV01; IP95; JBBA03] soulèvent un problème inhérent à leur nature globale. Les énergies de région s'appuient toutes sur un modèle d'intensité que doivent suivre les régions de l'objet recherché et du fond. Si nous considérons l'énergie de Chan et Vese, celle-ci étant basée sur la variance d'intensité à l'intérieur et à l'extérieur du contour, la courbe Γ minimisant $E_{\text{région}}^{\text{Chan-Vese}}$ sépare l'image en deux régions (une région objet R_{in} et une région de fond R_{out}) qui sont alors uniformes. Une hypothèse très contraignante est donc émise sur les intensités des régions. Plaçons-nous dans le cadre de la segmentation d'images médicales, dans lesquelles on souhaite généralement segmenter une structure en particulier. Bien souvent, le fond, plus précisément le complémentaire de l'objet, n'est pas uniforme, de par la présence de nombreuses structures d'intensités variées. Dans une moindre mesure, le niveau de gris de l'objet recherché n'est pas uniforme non plus. L'homogénéité d'intensité des régions dans leur globalité n'est donc pas nécessairement une propriété à rechercher.

Le développement de notre énergie de région part du constat suivant : dans de nombreuses applications, principalement en imagerie médicale, la plupart des structures d'intérêt peuvent être isolées du fond en considérant les différences d'intensité uniquement à proximité de la frontière de ces structures. La figure 5.1 représente des images où ce principe est vérifié. En effet, aucune de ces images ne comporte un fond uniforme. La moyenne des intensités du fond n'est pas significative si elle est calculée sur toute la région. Sur la figure 5.1(b), cela est d'autant plus vrai que les intensités moyennes à l'intérieur et à l'extérieur de l'objet risquent d'être très proches. De plus, dans certains cas, l'objet lui-même n'est pas uniforme (figure 5.1(c)). Par contre, si nous considérons les régions au voisinage de la frontière, délimitées par les contours en pointillés, les intensités sont homogènes. Les moyennes des intensités au voisinage de la frontière à l'intérieur et à l'extérieur permettent de différencier les régions l'une de l'autre.

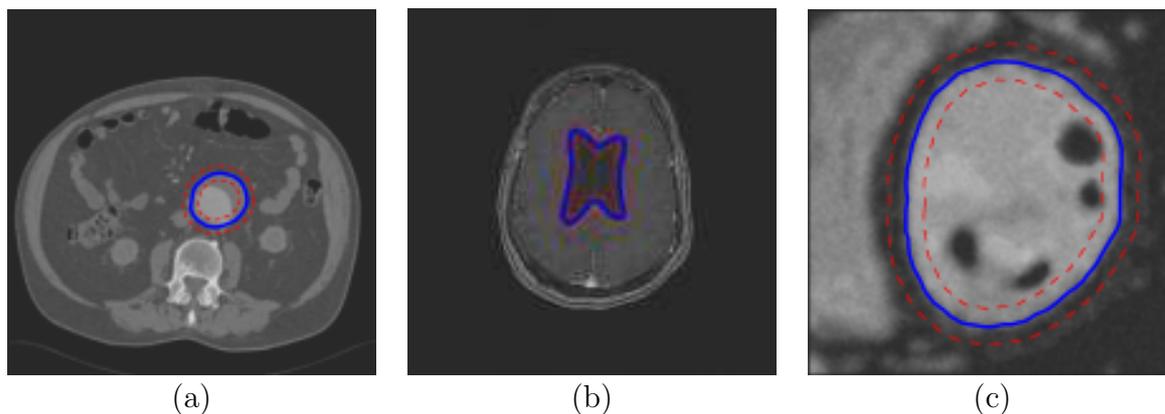


FIG. 5.1 – Exemples de structures pouvant être segmentées par approche région dans un voisinage : (a) Aorte en angioscanner (b) Ventricules du cerveau en IRM (c) Ventricule gauche du cœur en IRM

Ainsi, nous développons une énergie de région en bande étroite, dont la minimisation encourage le contour actif à satisfaire un critère d'homogénéité uniquement dans son voisinage, défini par des bandes intérieure et extérieure de chaque côté de la courbe. Le principe de la bande étroite, abordé en section 2.2.6, est à l'origine employé dans les ensembles de niveaux [AS95; Cho93] et les contours actifs à fronts duaux [LY07]. Dans ces approches, les bandes sont uniquement utilisées pour la déformation du contour. Elles servent à définir la plage de déplacement possible du contour à un instant donné. Nous les utilisons non pas pour l'évolution mais pour définir un nouveau critère de segmentation. Les déplacements du contour ne sont pas limités par les bandes car ces dernières suivent le contour au cours de son évolution. Nous définissons une bande intérieure \mathcal{B}_{in} et une bande extérieure \mathcal{B}_{out}

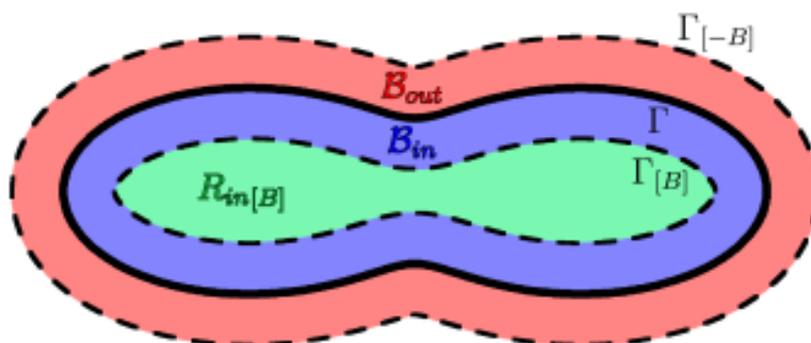


FIG. 5.2 – Bandes intérieure et extérieure pour l'énergie de région

de part et d'autre de la courbe Γ . Comme illustré en figure 5.2, elles vérifient :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{in} &\subset R_{in} \\ \mathcal{B}_{out} &\subset R_{out} \end{aligned}$$

Nous notons B l'épaisseur des bandes. Elle est la même pour \mathcal{B}_{in} et \mathcal{B}_{out} et est constante le long de la courbe Γ . L'expression générale de l'énergie de région en bande étroite est obtenue à partir de l'équation 5.1, en remplaçant les régions R_{in} et R_{out} par les bandes :

$$E_{\text{région}}(\Gamma) = g \left(\iint_{\mathcal{B}_{in}} g_{in}(I(\mathbf{x}))d\mathbf{x}, \iint_{\mathcal{B}_{out}} g_{out}(I(\mathbf{x}))d\mathbf{x} \right) \quad (5.11)$$

de sorte que toute énergie de région classique a son homologue en bande étroite. Le terme suivant est la version "bande étroite" de l'énergie de Chan et Vese :

$$E_{\text{région}}(\Gamma) = \iint_{\mathcal{B}_{in}} (I(\mathbf{x}) - \mu(\mathcal{B}_{in}))^2 d\mathbf{x} + \iint_{\mathcal{B}_{out}} (I(\mathbf{x}) - \mu(\mathcal{B}_{out}))^2 d\mathbf{x} \quad (5.12)$$

Il est à noter que la minimisation de l'énergie en bande étroite ne réalise pas une partition de l'image en régions au sens strict du terme, comme le ferait une croissance de région, dans la mesure où seules des portions réduites de R_{in} et R_{out} sont considérées. Les régions R_{in} et R_{out} ne sont pas forcées de vérifier une homogénéité stricte, trop contraignante pour les applications visées. Le terme de région en bande étroite peut être considéré comme une combinaison de caractéristiques globales et locales, le compromis entre ces deux types de caractéristiques pouvant être ajusté par l'épaisseur des bandes.

Les bandes peuvent être formalisées grâce à la théorie des courbes parallèles [FN90] [Gra97]. La courbe $\Gamma_{[B]}$ est une courbe parallèle de Γ si son vecteur position $\mathbf{c}_{[B]}$ vérifie :

$$\mathbf{c}_{[B]}(u) = \mathbf{c}(u) + B\mathbf{n}(u) \quad (5.13)$$

où B est une constante réelle, correspondant à la distance entre les deux courbes, et \mathbf{n} est la normale unitaire intérieure de Γ . Une courbe parallèle à Γ est située à distance constante de Γ sur toute sa longueur. Ainsi, la bande interne \mathcal{B}_{in} est délimitée par Γ à l'extérieur et $\Gamma_{[B]}$ à l'intérieur, tandis que la bande externe \mathcal{B}_{out} est délimitée par Γ à l'intérieur et $\Gamma_{[-B]}$ à l'extérieur, comme le montre la figure 5.2. Nous notons $R_{in[B]}$ et $R_{in[-B]}$ les régions délimitées respectivement par la courbe intérieure $\Gamma_{[B]}$ et extérieure $\Gamma_{[-B]}$. Ces régions vérifient :

$$R_{in[B]} \subset R_{in} \subset R_{in[-B]}$$

Par la suite, nous noterons avec l'indice $[B]$ toutes les quantités relatives à la courbe parallèle $\Gamma_{[B]}$. La formulation des courbes parallèles va nous permettre d'exprimer facilement les intégrales sur les domaines \mathcal{B}_{in} et \mathcal{B}_{out} . Dans les sections suivantes, nous montrons dans quelle mesure le principe de la bande étroite permet une implémentation du terme de région plus aisée que dans les approches région classiques. Cette implémentation passe par une transformation des intégrales de domaines que nous décrivons ci-dessous.

5.1.4 Approximation des intégrales de domaine

Par la suite, nous considérons que les courbes $\Gamma_{[B]}$ et $\Gamma_{[-B]}$ sont régulières et simples. La première condition implique que les courbes ne présentent pas de singularité (un point où la courbe n'est pas définie), elles peuvent ainsi être considérées comme continûment dérivables. Par ailleurs, si les courbes sont simples, elles ne présentent pas d'auto-intersection. La figure 5.3 représente une courbe Γ et deux de ses courbes parallèles $\Gamma_{[B_1]}$ et $\Gamma_{[B_2]}$ où B_1 et B_2 sont deux réels positifs tels que $B_1 < B_2$. La translation B_2 excède le rayon de courbure de Γ , générant ainsi des singularités comme au point $\mathbf{c}_{[B_2]}(u_1)$. De manière intuitive, la courbe parallèle risque de présenter des auto-intersections ou des singularités si B est trop grand en valeur absolue et si la courbe initiale est fortement courbée. Par la suite, nous serons en mesure d'expliquer ce phénomène mathématiquement. Introduisons

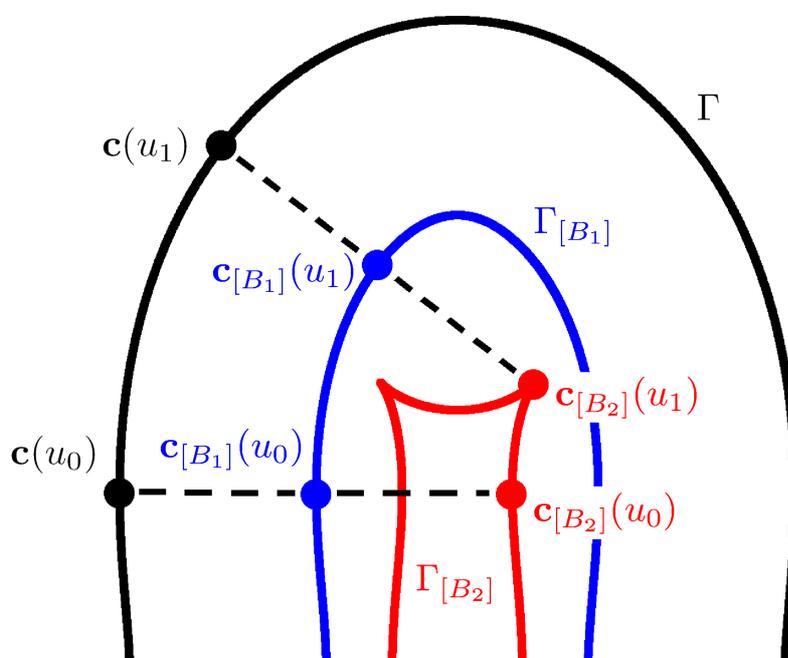


FIG. 5.3 – La courbe Γ (noire) et deux courbes parallèles. La translation B_1 génère une courbe $\Gamma_{[B_1]}$ régulière (en bleu) tandis qu'une translation plus importante B_2 génère une courbe présentant des singularités (en rouge)

une épaisseur de bande variable b . En faisant varier b dans l'intervalle $[0, B]$, nous décrivons toutes les courbes parallèles comprises entre Γ et $\Gamma_{[B]}$. Notre schéma de simplification des intégrales de bande peut se résumer ainsi : étant donnée une fonction réelle f définie sur \mathbb{R}^2 , sommer f sur la bande intérieure revient à sommer f sur toutes les courbes parallèles à Γ , comprises entre Γ et $\Gamma_{[B]}$. On approche donc l'intégrale de bande $J(f, \mathcal{B}_{in})$ par une

estimation $\hat{J}(f, \mathcal{B}_{in})$ qui intègre les intégrales de contour :

$$\begin{aligned} \hat{J}(f, \mathcal{B}_{in}) &= \int_0^B J(f, \Gamma_{[b]}) db \\ &= \int_0^B \int_{\Omega} f(\mathbf{c}_{[b]}) \left\| \frac{d\mathbf{c}_{[b]}}{du} \right\| du db \end{aligned} \quad (5.14)$$

Il en est de même pour approcher l'intégrale de bande sur \mathcal{B}_{out} , en remplaçant B par $-B$. Ce principe est illustré sur la figure 5.4 : en admettant que les courbes ont une épaisseur infinitésimale, l'aire entre les deux courbes épaisses peut être vue comme la somme des périmètres de toutes les courbes parallèles intermédiaires.

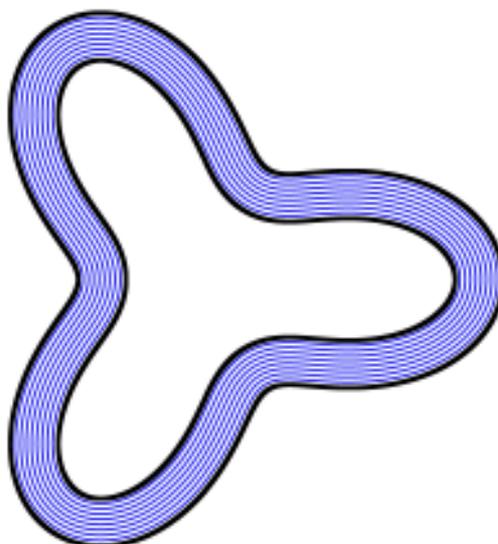


FIG. 5.4 – L'intégrale d'aire entre les deux courbes parallèles (en noir) est approchée comme la somme des intégrales sur toutes les courbes parallèles intermédiaires

L'approximation 5.14 conduit à une expression de l'intégrale de bande propice à son implémentation. L'intégrale de bande peut alors être discrétisée en une somme de termes de contour, d'après le modèle de l'équation 5.5. L'équation 5.14 peut toutefois être simplifiée davantage. Notons ℓ l'élément de longueur de la courbe Γ :

$$\ell(u) = \left\| \frac{d\mathbf{c}}{du} \right\|$$

L'élément de longueur de la courbe parallèle $\ell_{[B]}$ est :

$$\ell_{[B]}(u) = \left\| \frac{d\mathbf{c}_{[B]}}{du} \right\|$$

Nous montrons que l'élément de longueur de la courbe parallèle s'exprime en fonction de l'élément de longueur de la courbe initiale ainsi que de sa courbure κ . Il s'agit d'une

simplification importante pour l'implémentation des intégrales de bande. Nous utilisons la notation x' pour désigner la dérivée de x par rapport à u , de sorte que :

$$\ell = \sqrt{x'^2 + y'^2}$$

Rappelons que la courbure de Γ s'écrit :

$$\kappa(u) = \frac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x'y'' - x''y'}{\ell^3}$$

Le développement mathématique qui nous permet d'obtenir l'expression de $\ell_{[B]}$ en fonction de ℓ et κ est relativement fastidieux. Pour une version détaillée de ce développement, le lecteur pourra se référer à l'annexe A.1.1. Nous y démontrons que :

$$\ell_{[B]} = \ell |1 - B\kappa| \quad (5.15)$$

Le développement s'applique également à l'élément de longueur de la courbe parallèle extérieure $\Gamma_{[-B]}$:

$$\ell_{[-B]} = \ell |1 + B\kappa| \quad (5.16)$$

Les expressions de $\ell_{[B]}$ et $\ell_{[-B]}$ reflètent la condition de régularité des courbes $\Gamma_{[B]}$ et $\Gamma_{[-B]}$. En effet, sur $\Gamma_{[B]}$, $\ell(1 - B\kappa)$ devient négatif si $B > 1/\kappa$, c'est-à-dire si l'épaisseur de la bande excède le rayon de courbure. Aussi considérons-nous pour la suite de notre raisonnement que la courbe Γ est suffisamment lisse pour que :

$$-\frac{1}{B} < \kappa(u) < \frac{1}{B}, \quad \forall u \in \Omega \quad (5.17)$$

Nous verrons à la section 5.3.1 que l'hypothèse émise sur la régularité de Γ n'est pas contraignante quant à l'implémentation numérique. La condition 5.17 étant vérifiée, les courbes $\Gamma_{[B]}$ et $\Gamma_{[-B]}$ sont simples et régulières. Dans ce cas, nous écrivons :

$$\begin{aligned} \ell_{[B]} &= \ell(1 - B\kappa) \\ \ell_{[-B]} &= \ell(1 + B\kappa) \end{aligned} \quad (5.18)$$

qui sont les expressions finales de $\ell_{[B]}$ et $\ell_{[-B]}$ en fonction de ℓ . Elles sont utilisées pour l'estimation continue de $\hat{E}_{\text{région}}$ ainsi que pour sa discrétisation.

Ces expressions ont une signification concrète par rapport à la géométrie locale de la courbe. Lorsque celle-ci est localement convexe, comme au point $\mathbf{c}(u_1)$ sur la figure 5.3, la courbure $\kappa(u)$ est positive. Rétracter Γ dans la direction normale a pour effet de "compresser" la courbe au voisinage de $\mathbf{c}(u)$, d'où une diminution de l'élément de longueur : $\ell_{[B]}(u) < \ell(u)$. A l'inverse, lorsque la courbe est localement concave, la rétraction a tendance à "distendre" la courbe au voisinage de $\mathbf{c}(u)$, ce qui se traduit par $\ell_{[B]}(u) > \ell(u)$.

Notons que le résultat de l'équation 5.18 se retrouve sous une forme différente en théorie des courbes parallèles [EIKMS97] [Pre02]. Si ds et $ds_{[B]}$ sont les variations des abscisses curvilignes respectives de Γ et $\Gamma_{[B]}$, nous avons :

$$ds_{[B]} = (1 - B\kappa(s))ds$$

En injectant le résultat 5.18 dans l'équation 5.14, nous obtenons l'expression finale de l'approximation de l'intégrale sur la bande \mathcal{B}_{in} :

$$\hat{J}(f, \mathcal{B}_{in}) = \int_0^B \int_{\Omega} f(\mathbf{c} + b\mathbf{n}) \left\| \frac{d\mathbf{c}}{du} \right\| (1 - b\kappa(u)) dudb \quad (5.19)$$

L'intégrale sur le domaine \mathcal{B}_{out} est aisément obtenue en remplaçant B par $-B$. En annexe A.2, le lecteur trouvera le développement mathématique prouvant que les estimations $\hat{J}(f, \mathcal{B}_{in})$ et $\hat{J}(f, \mathcal{B}_{out})$ sont exactes lorsque $f = 1$. La preuve est basée sur le théorème de Green-Riemann et les quantités calculées sont alors les aires des bandes. L'expression générale 5.19 nous permet d'écrire l'estimation de l'énergie de région en bande étroite, notée $\hat{E}_{\text{région}}$. Le calcul des aires donne :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\mathcal{B}_{in}) &= \int_{\Omega} \left\| \frac{d\mathbf{c}}{du} \right\| \left(B - \frac{B^2}{2}\kappa \right) du \\ \mathcal{A}(\mathcal{B}_{out}) &= \int_{\Omega} \left\| \frac{d\mathbf{c}}{du} \right\| \left(B + \frac{B^2}{2}\kappa \right) du \end{aligned} \quad (5.20)$$

Les estimations des intensités moyennes $\hat{\mu}(\mathcal{B}_{in})$ et $\hat{\mu}(\mathcal{B}_{out})$ sont :

$$\begin{aligned} \hat{\mu}(\mathcal{B}_{in}) &= \frac{1}{\mathcal{A}(\mathcal{B}_{in})} \hat{J}(I, \mathcal{B}_{in}) = \frac{1}{\mathcal{A}(\mathcal{B}_{in})} \int_0^B \int_{\Omega} I(\mathbf{c} + b\mathbf{n}) \left\| \frac{d\mathbf{c}}{du} \right\| (1 - b\kappa) dudb \\ \hat{\mu}(\mathcal{B}_{out}) &= \frac{1}{\mathcal{A}(\mathcal{B}_{out})} \hat{J}(I, \mathcal{B}_{out}) = \frac{1}{\mathcal{A}(\mathcal{B}_{out})} \int_0^B \int_{\Omega} I(\mathbf{c} - b\mathbf{n}) \left\| \frac{d\mathbf{c}}{du} \right\| (1 + b\kappa) dudb \end{aligned} \quad (5.21)$$

Nous donnons l'expression finale de l'approximation de l'énergie. D'après 5.12 et 5.19, nous avons :

$$\begin{aligned} \hat{E}_{\text{région}}(\Gamma) &\approx \int_0^B \int_{\Omega} (I(\mathbf{c} + b\mathbf{n}) - \mu(\mathcal{B}_{in}))^2 \left\| \frac{d\mathbf{c}}{du} \right\| (1 - b\kappa) dudb \\ &+ \int_0^B \int_{\Omega} (I(\mathbf{c} - b\mathbf{n}) - \mu(\mathcal{B}_{out}))^2 \left\| \frac{d\mathbf{c}}{du} \right\| (1 + b\kappa) dudb \end{aligned} \quad (5.22)$$

A ce stade, nous serions en mesure de discrétiser l'énergie de région $\hat{E}_{\text{région}}$ et de l'incorporer dans l'algorithme glouton. Cependant, il est intéressant de ne pas se limiter au cadre de l'algorithme glouton et d'appliquer le calcul variationnel sur notre énergie de région, et ce pour plusieurs raisons. Le calcul des variations formalise de manière rigoureuse les conditions pour que l'énergie soit minimale. Il est ainsi possible d'envisager la minimisation de l'énergie par une autre méthode que l'algorithme glouton, comme l'approche physique ou les descentes de gradient. De plus, le calcul des variation apporte des éléments de justification à notre approximation de l'énergie de région exacte $E_{\text{région}}$ (équation 5.12) par l'estimation $\hat{E}_{\text{région}}$ (équation 5.22).

5.1.5 Calcul des variations

Le calcul des variations, abordé en section 2.2.1, est l'approche usuelle pour dériver une équation d'évolution à partir de la fonctionnelle d'énergie. Par l'intermédiaire de l'équation d'Euler-Lagrange, il permet de formuler de manière théorique la condition que doit vérifier Γ pour conduire à un minimum local de l'énergie, avant toute étape de discrétisation. Nous utilisons le calcul des variations sur l'énergie de région en bande étroite, afin de définir la condition de sa minimalité et d'extraire les expressions de la force et de l'énergie discrète correspondantes, en vue d'une implémentation efficace.

Dérivée fonctionnelle et équation d'Euler-Lagrange

Nous présentons tout d'abord le calcul des variations dans le cas monodimensionnel puis l'étendons au cadre des contours actifs. Plaçons-nous dans le cas d'une fonctionnelle E dépendant d'une fonction réelle x . Nous recherchons x telle que l'énergie suivante soit minimale :

$$E(x) = \int_{\Omega} \mathcal{L}(x, x', x'') du \quad (5.23)$$

où $\Omega = [0, 1]$ et \mathcal{L} est fonction des dérivées première et seconde de x par rapport à u . Etant donnée une petite variation $\epsilon v(u)$ appliquée à $x(u)$, le calcul des variations [AKL64; AWR90] montre que x minimise E si $E(x + \epsilon v)$ est minimal pour $\epsilon = 0$. Lorsque les conditions suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned} x(0) &= x(1) \text{ et } x'(0) = x'(1) \text{ et } x''(0) = x''(1) \\ v(0) &= v(1) = 0 \text{ et } v'(0) = v'(1) = 0 \end{aligned}$$

il est démontré dans [AKL64] que :

$$\frac{dE(x + \epsilon v)}{d\epsilon} = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} - \frac{d}{du} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'} + \frac{d^2}{du^2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x''} \right) v du = 0$$

Si cette condition est vérifiée quelle que soit la variation v , alors la condition suivante, qui est l'équation d'Euler-Lagrange correspondante à la minimisation de E , est vérifiée :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} - \frac{d}{du} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'} + \frac{d^2}{du^2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x''} = 0$$

Le membre de gauche de l'équation précédente est la dérivée fonctionnelle de E par rapport à x , notée $\delta E / \delta x$. L'équation d'Euler-Lagrange, qui traduit l'annulation de la dérivée fonctionnelle de l'énergie, est une condition nécessaire pour que x soit un extremum local de E .

Cette démarche est généralisable au modèle déformable 2D, où nous recherchons la courbe Γ , de vecteur position $\mathbf{c}(u) = (x(u), y(u))^T$, minimisant :

$$E(\Gamma) = \int_{\Omega} \mathcal{L}(x, x', x'', y, y', y'') du \quad (5.24)$$

Dans ce cas, E est minimale si sa dérivée fonctionnelle par rapport au vecteur position s'annule, ce qui est exprimé par l'équation d'Euler-Lagrange suivante :

$$\frac{\delta E}{\delta \mathbf{c}} = \mathbf{0}$$

qui se développe sur chaque coordonnée :

$$\begin{cases} \frac{\delta E}{\delta x} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} - \frac{d}{du} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'} + \frac{d^2}{du^2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x''} = 0 \\ \frac{\delta E}{\delta y} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} - \frac{d}{du} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} + \frac{d^2}{du^2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y''} = 0 \end{cases} \quad (5.25)$$

A partir de l'équation d'Euler-Lagrange, une équation d'évolution est obtenue en ajoutant un terme de vitesse :

$$\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} + \frac{\delta E}{\delta \mathbf{c}} = \mathbf{0}$$

Comme nous l'avons vu de nombreuses fois, la discrétisation de la vitesse permet d'obtenir un schéma d'évolution explicite :

$$\mathbf{c}^{(t+1)} = \mathbf{c}^{(t)} - \Delta t \frac{\delta E}{\delta \mathbf{c}}$$

dans lequel $\delta E / \delta \mathbf{c}$ peut être considéré comme le gradient de E au point \mathbf{x} , qui n'a de signification réelle que si \mathbf{x} appartient à la courbe. De plus, par analogie avec l'approche physique décrite à la section 4.3.1, $-\delta E / \delta \mathbf{c}$ est la force à appliquer au contour pour minimiser E .

Dans ce qui suit, nous appliquons le calcul des variations sur notre énergie de région en bande étroite $E_{\text{région}}$, le but étant de déterminer la dérivée fonctionnelle $\delta E_{\text{région}} / \delta \mathbf{c}$. Cette dérivée fonctionnelle indique la direction de minimisation de $E_{\text{région}}$, comme elle serait utilisée dans les méthodes de type descente de gradient.

Energie de région

Considérons l'expression exacte de notre énergie de région en bande étroite. D'après l'équation 5.12, en rappelant que $\mathcal{B}_{in} = R_{in} \setminus R_{in[B]}$ et $\mathcal{B}_{out} = R_{in[-B]} \setminus R_{in}$, nous avons :

$$\begin{aligned} E_{\text{région}}(\Gamma) &= \sigma^2(\mathcal{B}_{in}) + \sigma^2(\mathcal{B}_{out}) \\ &= J((I - \mu(\mathcal{B}_{in}))^2, \mathcal{B}_{in}) + J((I - \mu(\mathcal{B}_{out}))^2, \mathcal{B}_{out}) \\ &= J((I - \mu(\mathcal{B}_{in}))^2, R_{in}) - J((I - \mu(\mathcal{B}_{in}))^2, R_{in[B]}) \\ &\quad + J((I - \mu(\mathcal{B}_{out}))^2, R_{in[-B]}) - J((I - \mu(\mathcal{B}_{out}))^2, R_{in}) \end{aligned} \quad (5.26)$$

La dérivée fonctionnelle de $E_{\text{région}}$ est la somme des dérivées fonctionnelles des intégrales J figurant dans l'équation précédente. Pour calculer la dérivée fonctionnelle, nous transformons $E_{\text{région}}$ en une somme d'intégrales de contour avec le théorème de Green-Riemann et déterminons les dérivées fonctionnelles de ces intégrales par le calcul des variations. Dans ce qui suit, nous développons les dérivées fonctionnelles de $J(f, R_{in})$, $J(f, R_{in[B]})$ et $J(f, R_{in[-B]})$ pour une fonction f quelconque. Une fois celles-ci déterminées, la dérivée fonctionnelle de $E_{\text{région}}$ s'exprime aisément en remplaçant f par $(I - \mu(\mathcal{B}_{in}))^2$ ou $(I - \mu(\mathcal{B}_{out}))^2$ selon le cas. D'après l'équation 5.7, l'application du théorème de Green-Riemann sur $J(f, R_{in})$ donne :

$$J(f, R_{in}) = \iint_{R_{in}} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} y' Q(\mathbf{c}(u)) + x' P(\mathbf{c}(u)) du$$

avec :

$$Q(x, y) = \int_{-\infty}^x f(t, y) dt$$

$$P(x, y) = - \int_{-\infty}^y f(x, t) dt$$

En exprimant $J(f, R_{in})$ sous la forme de l'équation 5.24, qui donne :

$$\mathcal{L}(x, x', x'', y, y', y'') = \frac{1}{2} (y' Q(x, y) + x' P(x, y))$$

nous calculons les dérivées fonctionnelles en x et y selon l'équation 5.25. En utilisant les règles de simplification $\partial Q / \partial x = f$ et $\partial P / \partial y = -f$ issues de l'équation 5.1.5, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} &= \frac{1}{2} \left(y' f(x, y) + x' \frac{\partial P}{\partial x} \right) \\ \frac{d}{du} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'} &= \frac{1}{2} \frac{d}{du} \{ P(x(u), y(u)) \} = \frac{1}{2} \left(x' \frac{\partial P}{\partial x} - y' f(x, y) \right) \\ \frac{d^2}{du^2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x''} &= 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} &= \frac{1}{2} \left(y' \frac{\partial Q}{\partial y} - x' f(x, y) \right) \\ \frac{d}{du} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} &= \frac{1}{2} \frac{d}{du} \{ Q(x(u), y(u)) \} = \frac{1}{2} \left(x' f(x, y) + y' \frac{\partial Q}{\partial y} \right) \\ \frac{d^2}{du^2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y''} &= 0 \end{aligned}$$

En injectant les résultats de l'équation précédente dans l'équation 5.25, les dérivées fonctionnelles en x et en y s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{\delta J(f, R_{in})}{\delta x} = y' f(x, y) \\ \frac{\delta J(f, R_{in})}{\delta y} = -x' f(x, y) \end{cases}$$

Etant donné que la normale est définie par $\mathbf{n} = (-y', x')^T/\ell$, la dérivée fonctionnelle se réécrit sous forme vectorielle :

$$\frac{\delta J(f, R_{in})}{\delta \mathbf{c}} = -\ell f(\mathbf{c}) \mathbf{n} \quad (5.27)$$

Développons maintenant le terme $J(f, R_{in[B]})$ avec le théorème de Green-Riemann :

$$\begin{aligned} J(f, R_{in[B]}) &= \iint_{R_{in[B]}} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} y_{[B]}' Q(\mathbf{c}_{[B]}) + x_{[B]}' P(\mathbf{c}_{[B]}) du \end{aligned}$$

où P et Q sont données à l'équation 5.1.5. En exprimant $J(f, R_{in[B]})$ sous la forme de l'équation 5.24, \mathcal{L} s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x, x', x'', y, y', y'') \\ = \frac{1}{2} \left(\left(x' - \frac{B}{\ell} y'' \right) P \left(x - \frac{B}{\ell} y', y + \frac{B}{\ell} x' \right) + \left(y' + \frac{B}{\ell} x'' \right) Q \left(x - \frac{B}{\ell} y', y + \frac{B}{\ell} x' \right) \right) \end{aligned}$$

Les calculs de la dérivée fonctionnelle de $J(f, R_{in[B]})$ sont volumineux et sont donc reportés à l'annexe A.3 pour plus de lisibilité. Nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{\delta J(f, R_{in[B]})}{\delta x} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} - \frac{d}{du} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'} + \frac{d^2}{du^2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x''} \\ &= \frac{1}{2} f(\mathbf{c}_{[B]}) \left(y_{[B]}' + \frac{B}{\ell} x_{[B]}'' \right) + \frac{B}{2\ell} \left((x_{[B]}')^2 \frac{\partial f}{\partial x} + 2x_{[B]}' y_{[B]}' \frac{\partial f}{\partial y} \right) \\ \frac{\delta J(f, R_{in[B]})}{\delta y} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} - \frac{d}{du} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} + \frac{d^2}{du^2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y''} \\ &= \frac{1}{2} f(\mathbf{c}_{[B]}) \left(-x_{[B]}' + \frac{B}{\ell} y_{[B]}'' \right) + \frac{B}{2\ell} \left(2x_{[B]}' y_{[B]}' \frac{\partial f}{\partial x} + (y_{[B]}')^2 \frac{\partial f}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

qui se réécrit sous forme matricielle :

$$\begin{aligned} \frac{\delta J(f, R_{in[B]})}{\delta \mathbf{c}} &= \frac{1}{2} f(\mathbf{c}_{[B]}) \begin{bmatrix} y_{[B]}' + \frac{B}{\ell} x_{[B]}'' \\ -x_{[B]}' + \frac{B}{\ell} y_{[B]}'' \end{bmatrix} \\ &\quad + \frac{B}{2\ell} \begin{bmatrix} x_{[B]}'^2 & 2x_{[B]}' y_{[B]}' \\ 2x_{[B]}' y_{[B]}' & y_{[B]}'^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial f(\mathbf{c}_{[B]})}{\partial x} \\ \frac{\partial f(\mathbf{c}_{[B]})}{\partial y} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.28)$$

Par un développement similaire, la dérivée fonctionnelle sur la région délimitée par la courbe parallèle extérieure $R_{in[-B]}$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\delta J(f, R_{in[-B]})}{\delta \mathbf{c}} &= \frac{1}{2} f(\mathbf{c}_{[-B]}) \begin{bmatrix} y_{[-B]}' - \frac{B}{\ell} x_{[-B]}'' \\ -x_{[-B]}' - \frac{B}{\ell} y_{[-B]}'' \end{bmatrix} \\ &\quad - \frac{B}{2\ell} \begin{bmatrix} x_{[-B]}'^2 & 2x_{[-B]}'y_{[-B]}' \\ 2x_{[-B]}'y_{[-B]}' & y_{[-B]}'^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial f(\mathbf{c}_{[-B]})}{\partial x} \\ \frac{\partial f(\mathbf{c}_{[-B]})}{\partial y} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.29)$$

Ainsi, nous disposons de tous les éléments pour exprimer la dérivée fonctionnelle de l'énergie $E_{\text{région}}$ telle qu'elle est donnée à l'équation 5.26. Finalement, la dérivée fonctionnelle de E_{region} s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\delta E_{\text{région}}}{\delta \mathbf{c}} &= \frac{\delta J((I - \mu(\mathcal{B}_{in}))^2, R_{in})}{\delta \mathbf{c}} - \frac{\delta J((I - \mu(\mathcal{B}_{in}))^2, R_{in[B]})}{\delta \mathbf{c}} \\ &\quad + \frac{\delta J((I - \mu(\mathcal{B}_{out}))^2, R_{in[-B]})}{\delta \mathbf{c}} - \frac{\delta J((I - \mu(\mathcal{B}_{out}))^2, R_{in})}{\delta \mathbf{c}} \end{aligned} \quad (5.30)$$

Outre le fait que développer la dérivée fonctionnelle en reprenant les résultats des équations 5.27, 5.28 et 5.29 menerait à une expression assez lourde, nous ne l'utilisons pas sous cette forme. En effet, nous avons admis précédemment que $-\delta E_{\text{région}}/\delta \mathbf{c}$ est la force à appliquer au contour pour minimiser l'énergie $E_{\text{région}}$. Or, nous utilisons une méthode d'évolution qui n'autorise la courbe qu'à se déformer dans sa direction normale. En un point donné $\mathbf{c}(u)$, exprimée dans le repère de Frenet ayant pour origine $\mathbf{c}(u)$, la force de région est constituée d'une composante tangentielle et d'une composante normale. En ne conservant de cette force que la composante normale, ce qui revient à la projeter sur $\mathbf{n}(u)$, nous la rendons conforme à notre algorithme d'évolution. Dans ce qui suit, nous établissons le lien entre la composante normale de la force de région et la dérivée directionnelle.

5.1.6 Dérivation selon la normale

Généralités

Considérons une fonction f à valeurs réelles définie pour tout $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_p)^T \in \mathbb{R}^p$. Si f est dérivable par rapport à x_1, x_2, \dots, x_p , sa dérivée directionnelle par rapport à un vecteur $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^p$, notée $\langle f', \mathbf{v} \rangle$, représente sa variation dans la direction \mathbf{v} :

$$\langle f', \mathbf{v} \rangle = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + \tau \mathbf{v}) - f(\mathbf{x})}{\tau} = \left. \frac{df(\mathbf{x} + \tau \mathbf{v})}{d\tau} \right|_{\tau=0} \quad (5.31)$$

Elle peut se réécrire à l'aide de l'opérateur gradient :

$$\langle f', \mathbf{v} \rangle = \nabla f \cdot \mathbf{v} \quad (5.32)$$

Par ailleurs, les règles usuelles s'appliquent à la dérivée directionnelle :

$$\begin{aligned} \langle (fg)', \mathbf{v} \rangle &= g \langle f', \mathbf{v} \rangle + f \langle g', \mathbf{v} \rangle \\ \left\langle \left(\frac{f}{g} \right)', \mathbf{v} \right\rangle &= \frac{g \langle f', \mathbf{v} \rangle - f \langle g', \mathbf{v} \rangle}{g^2} \end{aligned}$$

Si nous revenons à la dérivée fonctionnelle décrite à la section précédente, $\delta E_{\text{région}}/\delta \mathbf{c}$ peut être interprétée comme le gradient $\nabla E_{\text{région}}(\mathbf{x})$ lorsque $\mathbf{x} = \mathbf{c}(u)$. D'après l'équation 5.32, la dérivée de l'énergie de région dans la direction normale s'écrit :

$$\langle E_{\text{région}}', \mathbf{n} \rangle = \nabla E_{\text{région}} \cdot \mathbf{n} = \frac{\delta E_{\text{région}}}{\delta \mathbf{c}} \cdot \mathbf{n} \quad (5.33)$$

En considérant un contour déformé uniquement par la force de région, son équation d'évolution dans la direction normale serait :

$$\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} = - \left(\frac{\delta E_{\text{région}}}{\delta \mathbf{c}} \cdot \mathbf{n} \right) \mathbf{n}$$

Si l'équation d'Euler-Lagrange $\nabla E_{\text{région}} = \mathbf{0}$ est vérifiée, alors l'état stationnaire de l'EDP précédente est atteint car $\nabla E_{\text{région}} \cdot \mathbf{n} = 0$.

Auparavant, nous avons introduit l'expression exacte $E_{\text{région}}$ et une approximation $\hat{E}_{\text{région}}$. La dérivée fonctionnelle de $E_{\text{région}}$ est calculable mais doit être projetée sur \mathbf{n} pour être en adéquation avec notre méthode d'évolution. Quant à la dérivée fonctionnelle de $\hat{E}_{\text{région}}$, elle mène à une expression excessivement complexe, que nous ne détaillerons pas. Par contre, son expression se prête bien à la dérivation dans la direction normale.

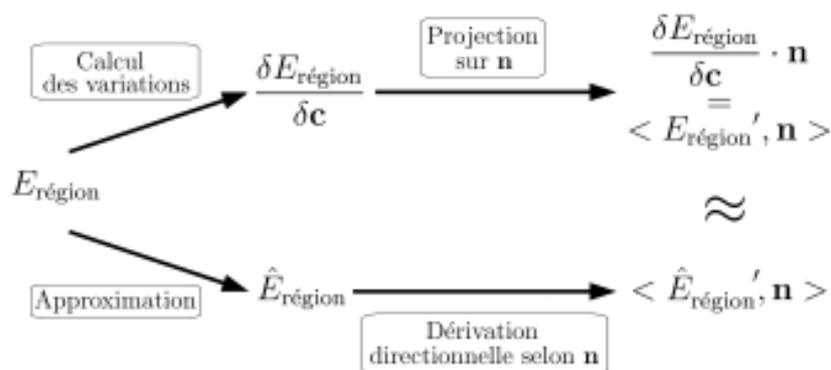


FIG. 5.5 – Schéma de l'étude mathématique de l'énergie de région en bande étroite

La figure 5.5 schématise le développement mathématique relatif à l'énergie de région en bande étroite. Les phases d'approximation et de calcul de variation ont été effectuées précédemment. Dans ce qui suit, les dérivées directionnelles normales des énergies exacte et approchée sont calculées et comparées. La dérivée directionnelle de $E_{\text{région}}$ est calculée par projection, tandis que celle de $\hat{E}_{\text{région}}$ est calculée par application directe de la dérivée.

Dérivation de l'énergie exacte

Pour exprimer $\langle E_{\text{région}}', \mathbf{n} \rangle$, nous calculons l'expression générale $\langle J(f, R)', \mathbf{n} \rangle$ pour $R = R_{in}$, $R = R_{in[B]}$ et $R = R_{in[-B]}$. D'après l'équation 5.33, l'égalité suivante est valable quelle que soit R :

$$\langle J(f, R)', \mathbf{n} \rangle = \frac{\delta J(f, R)}{\delta \mathbf{c}} \cdot \mathbf{n}$$

La dérivation du terme $J(f, R_{in})$ est triviale. D'après l'équation 5.27, nous avons :

$$\frac{\delta J(f, R_{in})}{\delta \mathbf{c}} \cdot \mathbf{n} = (-\ell f(\mathbf{c})\mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} = -\ell f(\mathbf{c})$$

Sur la région $R_{in[B]}$, en utilisant les simplifications $x'x'' + y'y'' = \ell' = 0$ et $x'x''' + x'x''' = -\ell^4 \kappa^2$, dans les calculs détaillés dans l'annexe A.4.1, nous obtenons :

$$\frac{\delta J(f, R_{in[B]})}{\delta \mathbf{c}} \cdot \mathbf{n} = -\frac{\ell}{2}(1 - B\kappa)^2 f(\mathbf{c}_{[B]}) + \frac{B}{2\ell} x'y' \nabla f(\mathbf{c}_{[B]}) \cdot \mathbf{t} \quad (5.34)$$

De même, sur la région $R_{in[-B]}$, il vient :

$$\frac{\delta J(f, R_{in[-B]})}{\delta \mathbf{c}} \cdot \mathbf{n} = -\frac{\ell}{2}(1 + B\kappa)^2 f(\mathbf{c}_{[-B]}) - \frac{B}{2\ell} x'y' \nabla f(\mathbf{c}_{[-B]}) \cdot \mathbf{t} \quad (5.35)$$

La dérivée directionnelle dans la direction normale de l'énergie de région exacte

$$\begin{aligned} \frac{\delta E_{\text{région}}}{\delta \mathbf{c}} \cdot \mathbf{n} &= \frac{\delta J((I - \mu(\mathcal{B}_{in}))^2, R_{in})}{\delta \mathbf{c}} \cdot \mathbf{n} - \frac{\delta J((I - \mu(\mathcal{B}_{in}))^2, R_{in[B]})}{\delta \mathbf{c}} \cdot \mathbf{n} \\ &+ \frac{\delta J((I - \mu(\mathcal{B}_{out}))^2, R_{in[-B]})}{\delta \mathbf{c}} \cdot \mathbf{n} - \frac{\delta J((I - \mu(\mathcal{B}_{out}))^2, R_{in})}{\delta \mathbf{c}} \cdot \mathbf{n} \end{aligned}$$

se développe en :

$$\begin{aligned} &\langle E_{\text{région}}', \mathbf{n} \rangle \\ &= -\ell(I(\mathbf{c}) - \mu(\mathcal{B}_{in}))^2 + \ell(I(\mathbf{c}) - \mu(\mathcal{B}_{out}))^2 \\ &+ \frac{\ell}{2}((1 - B\kappa)^2(I(\mathbf{c}_{[B]}) - \mu(\mathcal{B}_{in}))^2 - (1 + B\kappa)^2(I(\mathbf{c}_{[-B]}) - \mu(\mathcal{B}_{out}))^2) \\ &- \frac{B}{\ell} x'y'((I(\mathbf{c}_{[B]}) - \mu(\mathcal{B}_{in}))\nabla I(\mathbf{c}_{[B]}) \cdot \mathbf{t} + (I(\mathbf{c}_{[-B]}) - \mu(\mathcal{B}_{out}))\nabla I(\mathbf{c}_{[-B]}) \cdot \mathbf{t}) \end{aligned} \quad (5.36)$$

La force de région correspondante est :

$$\mathbf{f}_{\text{région}} = -\langle E_{\text{région}}', \mathbf{n} \rangle \mathbf{n}$$

de sorte que le contour aura tendance à croître si $\langle E_{\text{région}}', \mathbf{n} \rangle$ est positif. L'influence des différents termes qui composent $\langle E_{\text{région}}', \mathbf{n} \rangle$ sera explicitée dans un exemple détaillé plus loin. Cependant, nous pouvons d'ores et déjà remarquer que le terme $-(I(\mathbf{c}) - \mu(\mathcal{B}_{in}))^2 + (I(\mathbf{c}) - \mu(\mathcal{B}_{out}))^2$ est positif si $I(\mathbf{c})$ est plus proche de $\mu(\mathcal{B}_{in})$ que de $\mu(\mathcal{B}_{out})$. Ce terme participe à l'expansion du contour si le point courant est susceptible d'appartenir à la région intérieure, ce qui est conforme au principe d'une segmentation basée région.

Dérivation de l'énergie approchée

La forme approchée de l'énergie de région en bande étroite a l'avantage d'être facilement dérivable dans la direction normale au contour. Contrairement à l'énergie exacte, nous n'utilisons pas le calcul des variations et appliquons directement la définition de la dérivée directionnelle. Nous considérons l'estimation générale d'intégrale sur le domaine \mathcal{B}_{in} :

$$\hat{J}(f, \mathcal{B}_{in}) = \int_{\Omega} \int_0^B f(\mathbf{c} + b\mathbf{n}) \ell(1 - b\kappa) db du$$

Dans les calculs détaillés à l'annexe A.4.2, nous obtenons :

$$\langle \hat{J}(f, \mathcal{B}_{in})', \mathbf{n} \rangle = \ell((1 - B\kappa)f(\mathbf{c} + B\mathbf{n}) - f(\mathbf{c})) \quad (5.37)$$

En suivant une démarche similaire pour le terme général $\hat{J}(f, \mathcal{B}_{out})$ sur la bande extérieure, il vient :

$$\langle \hat{J}(f, \mathcal{B}_{out})', \mathbf{n} \rangle = \ell(f(\mathbf{c}) - (1 + B\kappa)f(\mathbf{c} - B\mathbf{n})) \quad (5.38)$$

Dans l'équation 5.37, nous remplaçons f par $(I - \hat{\mu}(\mathcal{B}_{in}))^2$. De même, dans l'équation 5.38, nous remplaçons f par $(I - \hat{\mu}(\mathcal{B}_{out}))^2$, ce qui nous permet d'aboutir à l'expression finale de la dérivée de $\hat{E}_{région}$ dans la direction normale :

$$\begin{aligned} \langle \hat{E}'_{région}, \mathbf{n} \rangle &= \ell((I(\mathbf{c}) - \hat{\mu}(\mathcal{B}_{out}))^2 - (I(\mathbf{c}) - \hat{\mu}(\mathcal{B}_{in}))^2) \\ &+ \ell_{[B]}(I(\mathbf{c}_{[B]}) - \hat{\mu}(\mathcal{B}_{in}))^2 - \ell_{[-B]}(I(\mathbf{c}_{[-B]}) - \hat{\mu}(\mathcal{B}_{out}))^2 \end{aligned} \quad (5.39)$$

qui est à comparer avec la dérivation de l'énergie exacte de l'équation 5.36. Nous remarquons que le terme approché est similaire à la majeure partie du terme exact, ce qui apporte un élément de justification à notre méthode d'approximation des intégrales de bandes. Dans la section relative à l'implémentation, nous nous basons sur l'expression 5.39 pour formuler l'énergie de région discrète incorporée dans l'algorithme glouton. Avant cela, nous étudions à l'aide d'un exemple le rôle des différents termes qui composent les dérivées des énergies exacte et approchée.

Exemple

Nous considérons la situation représentée à la figure 5.6, où l'intensité de l'image est normalisée : $I \in [0, 1]$. L'épaisseur de bande est $B = 10$ et l'élément de longueur est $\ell(u) = 1$. Etant données ces valeurs, nous admettons que la courbure κ varie dans l'intervalle $]-0.1, 0.1[$ afin que les courbes parallèles soient régulières conformément à l'équation 5.17. La vitesse de région désigne la quantité $-\langle E'_{région}, \mathbf{n} \rangle$ (ou $-\langle \hat{E}'_{région}, \mathbf{n} \rangle$ selon l'énergie considérée), car elle est l'amplitude signée du déplacement $\mathbf{f}_{région}$ défini à l'équation 5.1.6. Une vitesse négative entraîne une expansion du contour. Les expressions

de $\langle E_{\text{région}}', \mathbf{n} \rangle$ et $\langle \hat{E}'_{\text{région}}, \mathbf{n} \rangle$ peuvent être résumées par $\langle E_{\text{région}}', \mathbf{n} \rangle = F_1 + F_2 + F_4$ et $\langle \hat{E}'_{\text{région}}, \mathbf{n} \rangle = F_1 + F_3$ avec :

$$F_1 = (I(\mathbf{c}) - \mu(\mathcal{B}_{out}))^2 - (I(\mathbf{c}) - \mu(\mathcal{B}_{in}))^2$$

$$F_2 = \frac{1}{2}(1 - B\kappa)^2(I(\mathbf{c}_{[B]}) - \mu(\mathcal{B}_{in}))^2 - \frac{1}{2}(1 + B\kappa)^2(I(\mathbf{c}_{[-B]}) - \mu(\mathcal{B}_{out}))^2$$

$$F_3 = (1 - B\kappa)(I(\mathbf{c}_{[B]}) - \mu(\mathcal{B}_{in}))^2 - (1 + B\kappa)(I(\mathbf{c}_{[-B]}) - \mu(\mathcal{B}_{out}))^2$$

$$F_4 = Bx'y'((I(\mathbf{c}_{[B]}) - \mu(\mathcal{B}_{in}))\nabla I(\mathbf{c}_{[B]}) \cdot \mathbf{t} + (I(\mathbf{c}_{[-B]}) - \mu(\mathcal{B}_{out}))\nabla I(\mathbf{c}_{[-B]}) \cdot \mathbf{t})$$

Les expressions de F_2 et F_3 étant très similaires, la différence majeure est la présence dans $\langle E_{\text{région}}', \mathbf{n} \rangle$ du terme F_4 , dépendant de $\nabla I(\mathbf{c}_{[B]}) \cdot \mathbf{t}$ et $\nabla I(\mathbf{c}_{[-B]}) \cdot \mathbf{t}$. F_4 est donc nul si l'image ne varie pas dans la direction tangente à la courbe, ce qui est généralement le cas lors de la déformation du contour. Seules les variations d'intensités normales au contour sont significatives dans notre approche région en bande étroite. D'autre part, un des facteurs de ce terme est $x'y'$, dont la signification physique est difficile à interpréter. Nous considérons F_4 comme un effet de bord introduit par la dérivation fonctionnelle. Il n'intervient pas dans la déformation du contour selon le critère d'homogénéité de région et il sera par conséquent ignoré.

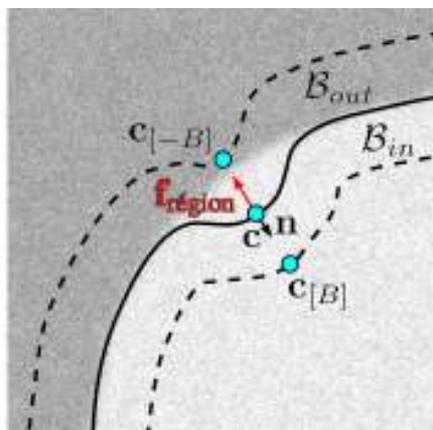


FIG. 5.6 – Déplacement appliqué au point $\mathbf{c}(u)$ pour la minimisation de l'énergie de région en bande étroite

La figure 5.7 représente $\langle \hat{E}'_{\text{région}}, \mathbf{n} \rangle$ en fonction de différentes variables. $\langle \hat{E}'_{\text{région}}, \mathbf{n} \rangle$ étant l'opposé de la vitesse, une valeur positive entraîne une expansion du contour. Les quatre représentations graphiques ont été obtenues avec les constantes suivantes :

- (a) $\hat{\mu}(\mathcal{B}_{in}) = 0.7, \hat{\mu}(\mathcal{B}_{out}) = 0.3, I(\mathbf{c}) = 0.5, I(\mathbf{c}_{[B]}) = 0.5, I(\mathbf{c}_{[-B]}) = 0.5$
- (b) $\hat{\mu}(\mathcal{B}_{in}) = 0.7, \hat{\mu}(\mathcal{B}_{out}) = 0.4, I(\mathbf{c}_{[B]}) = 0.95, I(\mathbf{c}_{[-B]}) = 0.3$
- (c) $\hat{\mu}(\mathcal{B}_{in}) = 0.7, \hat{\mu}(\mathcal{B}_{out}) = 0.3, I(\mathbf{c}) = 0.5, I(\mathbf{c}_{[B]}) = 0.6$
- (d) $\hat{\mu}(\mathcal{B}_{in}) = 0.7, \hat{\mu}(\mathcal{B}_{out}) = 0.3, I(\mathbf{c}) = 0.5, I(\mathbf{c}_{[-B]}) = 0.2$

Dans la situation (a), le terme F_1 s'annule. De plus, $(I(\mathbf{c}_{[B]}) - \hat{\mu}(\mathcal{B}_{in}))^2$ et $(I(\mathbf{c}_{[-B]}) - \hat{\mu}(\mathcal{B}_{out}))^2$ deviennent égaux. Sous cette condition, F_3 se factorise :

$$F_3 = (I(\mathbf{c}_{[B]}) - \mu(\mathcal{B}_{in}))^2((1 - B\kappa) - (1 - B\kappa)) = -2B\kappa(I(\mathbf{c}_{[B]}) - \mu(\mathcal{B}_{in}))^2$$

Le signe de F_3 dépend uniquement de celui de la courbure. On aura ainsi une expansion si \mathbf{c} est concave ($\kappa < 0$) et une rétractation si \mathbf{c} est convexe ($\kappa > 0$). Dans cette situation très particulière, l'énergie de région a ici un effet régularisant sur la courbe. Dans le cas (b), nous mettons en évidence l'influence de F_1 en faisant varier $I(\mathbf{c})$. Naturellement, la vitesse augmente lorsque l'intensité se rapproche de $\hat{\mu}(\mathcal{B}_{in})$. L'expansion est toutefois amoindrie lorsque la courbure augmente. La courbure aura donc tendance à freiner l'expansion d'une portion de courbe si celle-ci est déjà suffisamment avancée par rapport au reste du contour. A l'inverse, elle encouragera l'expansion d'une portion de courbe en retrait. Le même phénomène se produit dans les cas (c) et (d), où l'influence du terme F_1 est nulle. En (c), le contour recule sauf si l'intensité sur la bande extérieure est très proche de la moyenne extérieure. A l'inverse, en (d), le contour avance si l'intensité sur la bande intérieure est très proche de la moyenne intérieure. Les cas de stabilisation sont ainsi mis en évidence, dans le mesure où la vitesse est proche de 0 lorsque les intensités sur les bandes sont homogènes. De façon générale, la force de région que nous avons dérivée est consistante par rapport au principe de région en bande étroite établie au départ.

5.1.7 Implémentation

Nous décrivons ici l'implémentation de l'énergie de région dans notre modèle de contour discret. Les quantités différentielles nécessaires au calcul de l'énergie sont discrétisées et l'énergie est incorporée dans l'algorithme glouton. Nous introduisons également une technique de régularisation supplémentaire basée sur un filtre gaussien.

Discrétisation

L'élément de longueur et la courbure au sommet \mathbf{p}_i se discrétisent par différences finies :

$$\begin{aligned} \ell_i &= \frac{\|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{i-1}\| + \|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{i+1}\|}{2} \\ \kappa_i &= \frac{(x_i - x_{i-1})(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}) - (x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1})(y_i - y_{i-1})}{\ell_i^3} \end{aligned} \tag{5.40}$$

Viennent ensuite les caractéristiques globales nécessaires à l'implémentation de l'énergie de région, qui sont l'aire et l'intensité moyenne des bandes \mathcal{B}_{in} et \mathcal{B}_{out} . Les expressions

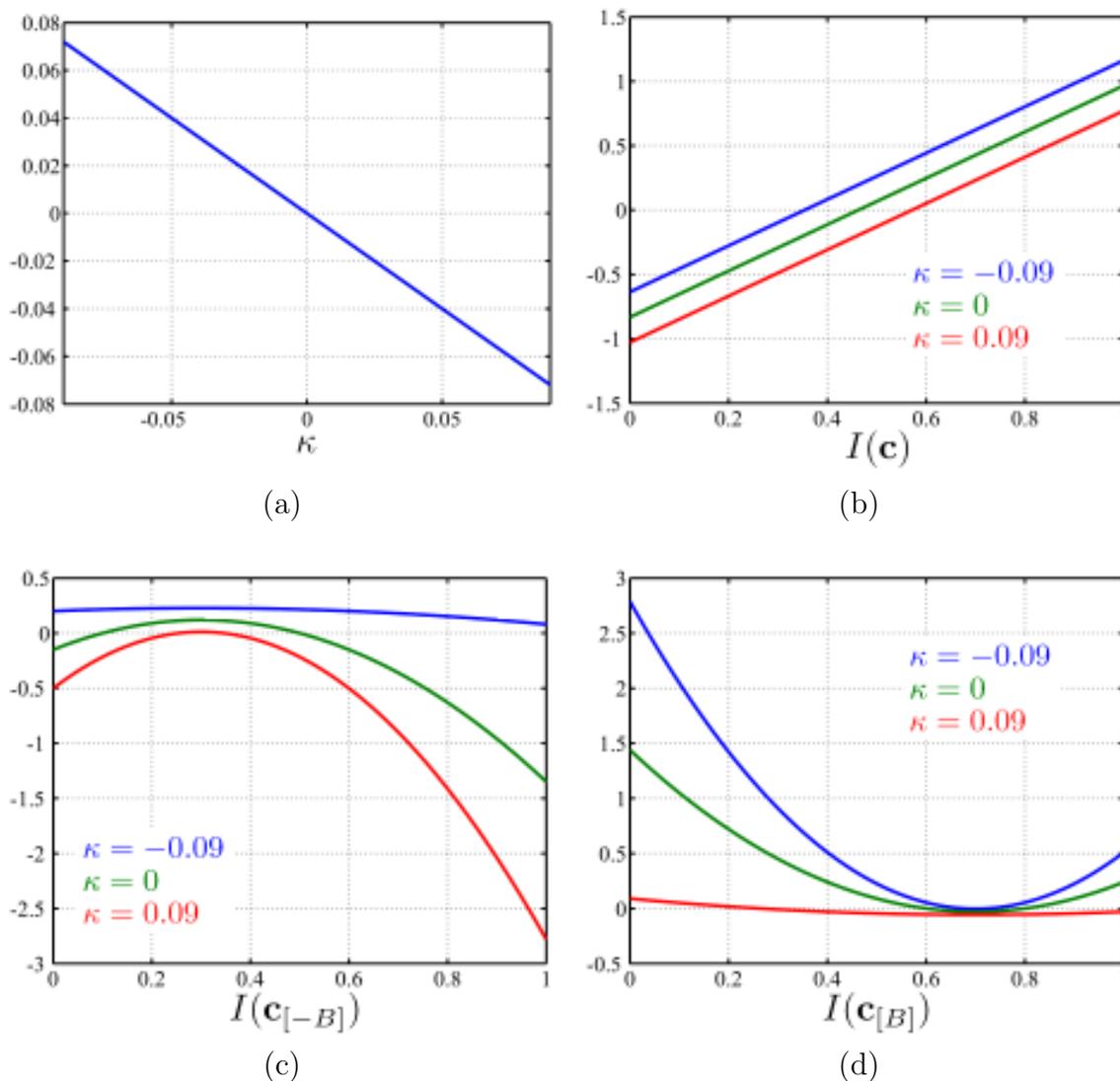


FIG. 5.7 – Valeur de $\langle \hat{E}'_{\text{région}}, \mathbf{n} \rangle$ en fonction de : (a) Courbure κ (b) Intensité $I(\mathbf{c})$ (c) Intensité $I(\mathbf{c}_{[-B]})$ (d) Intensité $I(\mathbf{c}_{[B]})$

suivantes proviennent de la discrétisation des expressions des équations 5.20 et 5.21 :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}(\mathcal{B}_{in}) &= B \sum_{i=1}^n \ell_i - \frac{B^2}{2} \sum_{i=1}^n \ell_i \kappa_i \\
 \mathcal{A}(\mathcal{B}_{out}) &= B \sum_{i=1}^n \ell_i + \frac{B^2}{2} \sum_{i=1}^n \ell_i \kappa_i \\
 \hat{\mu}(\mathcal{B}_{in}) &= \frac{1}{\mathcal{A}(\mathcal{B}_{in})} \sum_{i=1}^n \sum_{b=0}^{B-1} \ell_i (1 - b\kappa_i) I(\mathbf{p}_i + b\mathbf{n}_i) \\
 \hat{\mu}(\mathcal{B}_{out}) &= \frac{1}{\mathcal{A}(\mathcal{B}_{out})} \sum_{i=1}^n \sum_{b=1}^B \ell_i (1 + b\kappa_i) I(\mathbf{p}_i - b\mathbf{n}_i)
 \end{aligned} \tag{5.41}$$

Energie

La méthode utilisée pour la déformation du contour basé sur l'énergie de région en bande étroite est l'algorithme glouton à fenêtre normale. A l'itération t , le schéma d'évolution du sommet \mathbf{p}_i est :

$$\mathbf{p}_i^{(t+1)} = \underset{\tilde{\mathbf{p}}_i \in W_N}{\operatorname{argmin}} E(\tilde{\mathbf{p}}_i^{(t)})$$

où W_N est la fenêtre normale définie à l'équation 4.22. Nous rappelons que l'évolution selon la normale n'utilise pas l'énergie de continuité, qui est remplacée par le lissage tangentiel. Par ailleurs, l'énergie de région permet de s'affranchir de l'énergie ballon. En effet, l'expansion et la rétraction du contour sont désormais dépendantes de l'intensité rencontrée. L'énergie à la position testée $\tilde{\mathbf{p}}_i$ est :

$$E(\tilde{\mathbf{p}}_i) = \omega_{\text{courbure}} E_{\text{courbure}}(\tilde{\mathbf{p}}_i) + \omega_{\text{gradient}} E_{\text{gradient}}(\tilde{\mathbf{p}}_i) + \omega_{\text{région}} E_{\text{région}}(\tilde{\mathbf{p}}_i) \quad (5.42)$$

L'implémentation de $E_{\text{région}}(\tilde{\mathbf{p}}_i)$ se base sur la force de région $\mathbf{f}_{\text{région}}(\mathbf{p}_i)$ colinéaire à \mathbf{n}_i . Le sens et l'amplitude de la force de région sont donnés par la dérivée directionnelle écrite à l'équation 5.39, en considérant le sommet \mathbf{p}_i correspondant au point de contour $\mathbf{c}(u)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{\text{région}}(\mathbf{p}_i) &= - \left(\left. \langle \hat{E}'_{\text{région}}, \mathbf{n} \rangle \right|_{\mathbf{c}(u)=\mathbf{p}_i} \right) \mathbf{n}_i \\ &= - \left[\ell_i (I(\mathbf{p}_i) - \hat{\mu}(\mathcal{B}_{\text{out}}))^2 - \ell_i (I(\mathbf{p}_i) - \hat{\mu}(\mathcal{B}_{\text{in}}))^2 \right. \\ &\quad \left. + \ell_i (1 - B\kappa_i) (I(\mathbf{p}_i + B\mathbf{n}_i) - \hat{\mu}(\mathcal{B}_{\text{in}}))^2 \right. \\ &\quad \left. - \ell_i (1 + B\kappa_i) (I(\mathbf{p}_i - B\mathbf{n}_i) - \hat{\mu}(\mathcal{B}_{\text{out}}))^2 \right] \mathbf{n}_i \end{aligned} \quad (5.43)$$

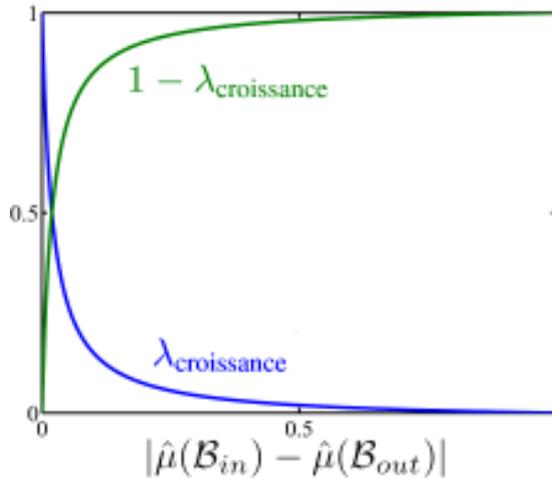


FIG. 5.8 – Influence de la force de biais en fonction de l'écart absolu entre $\hat{\mu}(\mathcal{B}_{\text{in}})$ et $\hat{\mu}(\mathcal{B}_{\text{out}})$

Il demeure un cas particulier où l'expression de $\mathbf{f}_{\text{région}}$ est problématique. En effet, l'amplitude de $\mathbf{f}_{\text{région}}$ est faible lorsque $\hat{\mu}(\mathcal{B}_{\text{in}})$ et $\hat{\mu}(\mathcal{B}_{\text{out}})$ sont proches. Dans le cas où

$\hat{\mu}(\mathcal{B}_{in}) = \hat{\mu}(\mathcal{B}_{out})$, le terme $\ell_i(I(\mathbf{p}_i) - \hat{\mu}(\mathcal{B}_{out}))^2 - \ell_i(I(\mathbf{p}_i) - \hat{\mu}(\mathcal{B}_{in}))^2$ s'annule. Cette situation se produit par exemple lorsque le contour est initialisé à l'intérieur d'une zone uniforme. Or, conformément au critère d'homogénéité, le contour doit se dilater si l'intensité $I(\mathbf{p}_i)$ est proche de $\hat{\mu}(\mathcal{B}_{in})$ quelle que soit la valeur de $\hat{\mu}(\mathcal{B}_{out})$. Nous introduisons un biais $\mathbf{f}_{\text{croissance}}$ encourageant l'expansion du contour si $I(\mathbf{p}_i)$ est proche de $\hat{\mu}(\mathcal{B}_{in})$:

$$\mathbf{f}_{\text{croissance}} = -(1 - |I(\mathbf{p}_i) - \hat{\mu}(\mathcal{B}_{in})|)\mathbf{n}_i$$

L'influence de ce biais doit diminuer rapidement lorsque $\hat{\mu}(\mathcal{B}_{in})$ s'éloigne de $\hat{\mu}(\mathcal{B}_{out})$. Pour cela, nous pondérons $\mathbf{f}_{\text{croissance}}$ par le coefficient $\lambda_{\text{croissance}}$ calculé comme suit :

$$\lambda_{\text{croissance}} = \frac{1 - |\hat{\mu}(\mathcal{B}_{in}) - \hat{\mu}(\mathcal{B}_{out})|}{1 + \beta |\hat{\mu}(\mathcal{B}_{in}) - \hat{\mu}(\mathcal{B}_{out})|}$$

Ainsi, $\lambda_{\text{croissance}}$ vaut 1 lorsque $\hat{\mu}(\mathcal{B}_{in}) = \hat{\mu}(\mathcal{B}_{out})$ et décroît rapidement jusqu'à atteindre 0 lorsque la différence entre $\hat{\mu}(\mathcal{B}_{in})$ et $\hat{\mu}(\mathcal{B}_{out})$ est maximale. Le coefficient β ajuste la vitesse de décroissance. Nous avons déterminé empiriquement que sa valeur n'était pas critique au delà d'un certain seuil (environ 50). Comme représenté graphiquement à la figure 5.8, le terme $\mathbf{f}_{\text{croissance}}$ est prépondérant lorsque les intensités moyennes sont proches. Son influence diminue au profit de $\mathbf{f}_{\text{région}}$ lorsque l'écart entre les intensités se creuse :

$$\mathbf{f}_{\text{région+croissance}} = \lambda_{\text{croissance}}\mathbf{f}_{\text{croissance}} + (1 - \lambda_{\text{croissance}})\mathbf{f}_{\text{région}} \quad (5.44)$$

Nous formulons l'énergie à la position testée $\tilde{\mathbf{p}}_i$ de façon à ce qu'elle soit élevée si le déplacement $\tilde{\mathbf{p}}_i - \mathbf{p}_i$ est contraire à $\mathbf{f}_{\text{région}}(\mathbf{p}_i)$. On pénalise ainsi une position $\tilde{\mathbf{p}}_i$ allant à l'encontre du critère d'homogénéité de région :

$$E_{\text{région}}(\tilde{\mathbf{p}}_i) = -(\tilde{\mathbf{p}}_i - \mathbf{p}_i) \cdot \mathbf{f}_{\text{région+croissance}} \quad (5.45)$$

Lissage gaussien

Nous avons mentionné au chapitre 4 que minimiser l'énergie de courbure revient à effectuer un lissage laplacien du contour. Le mouvement par lissage laplacien est formalisé par l'EDP suivante :

$$\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \mathbf{c}}{\partial u^2}$$

qui se traduit en schéma explicite discret :

$$\mathbf{p}_i^{(t+1)} = \mathbf{p}_i^{(t)} + \alpha(\mathbf{p}_{i-1}^{(t)} - 2\mathbf{p}_i^{(t)} + \mathbf{p}_{i+1}^{(t)})$$

où le pas α est compris entre 0 et 1/2. Le lissage laplacien intervient uniquement au voisinage d'ordre 1 et est donc limité d'un point de vue spatial. Comme il est abordé dans la section présentant les résultats, certaines données, particulièrement bruitées, requièrent des contraintes de régularisation très fortes sur le contour. Sans cette régularisation,

le contour souffre d'un comportement instable. Il est alors nécessaire d'effectuer une régularisation plus diffuse que le lissage laplacien. Appliquer plusieurs lissages successifs de ce type n'est pas une solution envisageable, car ces derniers sont accompagnés d'un phénomène de rétrécissement qui freine la progression du contour. La problématique de lissage sans rétrécissement a notamment été traitée dans [Hor86] et [Oli93].

Pour obtenir une régularisation diffuse, nous utilisons un lissage gaussien. Le contour évolue alors selon l'EDP suivante :

$$\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} = \mathbf{c} * G_\sigma - \mathbf{c} \quad (5.46)$$

où G_σ est une fonction gaussienne de moyenne nulle et d'écart-type σ :

$$G_\sigma(u) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right)$$

Le filtre gaussien est appliqué indépendamment sur chaque coordonnée, dans la mesure où nous avons :

$$\mathbf{c} * G_\sigma = (x * G_\sigma, y * G_\sigma)^T$$

Il est généralement admis que la valeur de la gaussienne est considérée comme nulle au delà de 3σ . L'ordre du filtre η est donc choisi en conséquence, en posant $\eta = 3\sigma$. Pour éviter le rétrécissement, nous utilisons la méthode en deux passes introduite par Taubin [Tau95]. Elle consiste à appliquer deux fois le filtre gaussien, une première fois avec un coefficient positif et une deuxième fois avec un coefficient négatif. Dans l'algorithme suivant, \mathbf{p}_i^* et \mathbf{p}_i^{**} sont respectivement les positions du sommet \mathbf{p}_i après la première et la deuxième passe. Le vecteur $\mathbf{f}_{\text{gaussienne}}(\mathbf{p}_i)$ est la force de lissage gaussien.

LissageGaussien

Pour $i \leftarrow 1$ à n **faire**

$$\mathbf{f}_{\text{gaussienne}}(\mathbf{p}_i) \leftarrow \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\eta}^{k=\eta} \exp\left(-\frac{k^2}{2\sigma^2}\right) \mathbf{p}_{i+k} \right) - \mathbf{p}_i$$

$\mathbf{p}_i^* \leftarrow \mathbf{p}_i + \mathbf{f}_{\text{gaussienne}}(\mathbf{p}_i)$

FinPour

Pour $i \leftarrow 1$ à n **faire**

$$\mathbf{f}_{\text{gaussienne}}(\mathbf{p}_i^*) \leftarrow \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\eta}^{k=\eta} \exp\left(-\frac{k^2}{2\sigma^2}\right) \mathbf{p}_{i+k}^* \right) - \mathbf{p}_i^*$$

$\mathbf{p}_i^{**} \leftarrow \mathbf{p}_i^* - \mathbf{f}_{\text{gaussienne}}(\mathbf{p}_i^*)$

FinPour

Nous avons choisi d'utiliser le poids ω_{courbure} comme écart-type du filtre gaussien, car ces deux paramètres visent le même objectif de régularisation. Lorsqu'il est utilisé, le lissage gaussien est appliqué après chaque itération de l'algorithme glouton, avant l'étape de reparamétrisation.

5.2 Extension au modèle de surface active

5.2.1 Difficultés

L'approche décrite pour le contour actif 2D s'étend naturellement à la surface active 3D. La surface Γ , de vecteur position $\mathbf{s}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))^T$, sépare le domaine image $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$ en deux régions volumiques R_{in} et R_{out} . De manière générale, l'énergie de région classique associée à la surface est l'extension tridimensionnelle de celle présentée à l'équation 5.1. Elle est définie en terme d'intégrales de volume de la fonction d'intensité I :

$$E_{\text{région}}(\Gamma) = g \left(\iiint_{\mathbf{x} \in R_{in}} g_{in}(I(\mathbf{x})) d\mathbf{x}, \iiint_{\mathbf{x} \in R_{out}} g_{out}(I(\mathbf{x})) d\mathbf{x} \right) \quad (5.47)$$

où g , g_{in} , et g_{out} ont le même rôle que dans l'expression 5.1. Pour exprimer l'énergie de région de Chan et Vese associée à la surface, nous définissons le volume des régions :

$$\mathcal{V}(R_{in}) = \iiint_{\mathbf{x} \in R_{in}} d\mathbf{x} \quad \mathcal{V}(R_{out}) = \iiint_{\mathbf{x} \in R_{out}} d\mathbf{x}$$

et les intensités moyennes sur ces régions :

$$\mu(R_{in}) = \frac{1}{\mathcal{V}(R_{in})} \iiint_{R_{in}} I(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad \mu(R_{out}) = \frac{1}{\mathcal{V}(R_{out})} \iiint_{R_{out}} I(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

L'énergie de Chan et Vese tridimensionnelle est la somme des variances d'intensité intérieure $\sigma^2(R_{in})$ et extérieure $\sigma^2(R_{out})$:

$$\begin{aligned} E_{\text{région}}^{\text{Chan-Vese}}(\Gamma) &= \sigma^2(R_{in}) + \sigma^2(R_{out}) \\ &= \iiint_{R_{in}} (I(\mathbf{x}) - \mu(R_{in}))^2 d\mathbf{x} + \iiint_{R_{out}} (I(\mathbf{x}) - \mu(R_{out}))^2 d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (5.48)$$

L'implémentation du terme de région, déjà problématique en 2D, l'est davantage en 3D. Etant donnée une fonction $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, la notation $J(f, D)$ désigne l'intégrale de f sur le domaine D . Une intégrale de surface $J(f, \Gamma)$ s'exprime de la façon suivante :

$$J(f, \Gamma) = \iint_{\Omega} f(\mathbf{s}(u, v)) a(u, v) du dv$$

où $a(u, v)$ est l'élément de surface au point $\mathbf{s}(u, v)$. Il s'écrit :

$$a(u, v) = \left\| \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial v} \right\| \quad (5.49)$$

L'intégrale de surface est donc intrinsèque, car indépendante de la paramétrisation de la surface. Lorsque le domaine D est une région volumique R , nous avons :

$$J(f, R) = \iiint_{\mathbf{x} \in R} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

Une intégrale de surface s'implémente aisément sur notre modèle de surface discrète, en sommant les valeurs de f aux sommets du maillage triangulaire pondérées par les éléments de surface :

$$J(f, \Gamma) \approx \sum_{i=1}^n f(\mathbf{p}_i) a_i$$

où a_i est l'élément de surface discret associé au sommet \mathbf{p}_i . Etant détaillé par la suite, nous considérons pour l'instant que a_i est fonction de l'aire des triangles auxquels appartient \mathbf{p}_i . Les difficultés rencontrées en 2D pour l'implémentation des intégrales de région se retrouvent ici accrues. Si l'intégrale de volume est implémentée sans transformation aucune, l'ensemble des voxels inclus dans le volume R_{in} doit être déterminé. Avec une implémentation en ensembles de niveaux 3D comme celle de Dufour *et al* [DST⁺05] ou Scherl *et al.* [SHPL07], les voxels intérieurs sont aisément déterminés d'après le signe de la fonction ψ . En 3D, les ensembles de niveaux basés région demandent peu d'implémentations supplémentaires par rapport aux ensembles de niveaux basés contour, qui induisent déjà des coûts calculatoires très importants. Avec une représentation explicite comme le maillage, la surface requiert une mise à jour de la région intérieure au fur et à mesure de sa déformation. Ceci nécessite des méthodes de voxélisation de la surface et de remplissage de volume [Kau87]. Un algorithme de remplissage est employé par Slabaugh et Unal [SU05] sur un maillage triangulaire muni de l'énergie de région de Chan et Vese. Ici encore, les temps de calcul sont considérables, car l'algorithme de remplissage doit être appelé dès que la surface subit une déformation importante. Pour éviter d'avoir recours à un algorithme de remplissage, il est possible d'utiliser les intensités cumulées en x , y et z et de convertir les intégrales de volume en intégrales de surface à l'aide du théorème de Green-Ostrogradski, que nous détaillons ci-dessous.

5.2.2 Le théorème de Green-Ostrogradski pour les surfaces actives basées région

Le théorème de Green-Ostrogradski, plus connu en physique comme le théorème de flux-divergence, permet de convertir une intégrale de volume en une intégrale de surface. Considérons une région $R \subset \mathbb{R}^3$ de bord ∂R et un champ vectoriel \mathbf{v} :

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \mathbf{x} = (x, y, z)^T &\longmapsto \mathbf{v}(\mathbf{x}) = (v_x(\mathbf{x}), v_y(\mathbf{x}), v_z(\mathbf{x}))^T \end{aligned}$$

Si \mathbf{v} est continûment dérivable, la divergence de \mathbf{v} est une application de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R} telle que :

$$\operatorname{div}(\mathbf{v}) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Le théorème de Green-Ostrogradski établit le lien entre l'intégrale de la divergence de \mathbf{v} sur R et l'intégrale de surface de \mathbf{v} sur ∂R :

$$\iiint_R \operatorname{div}(\mathbf{v}) \, dV = \iint_{\partial R} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dA \quad (5.50)$$

où dA et dV sont les éléments différentiels d'aire et de volume et \mathbf{n} est la normale unitaire intérieure à la surface. Si la frontière ∂R est paramétrée par la surface Γ de vecteur position $\mathbf{s}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))^T$, l'intégrale de surface s'écrit :

$$\iint_{\partial R} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dA = \iint_{\Omega} \mathbf{v}(\mathbf{s}(u, v)) \cdot \mathbf{n}(u, v) \left\| \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial v} \right\| \, dudv \quad (5.51)$$

Pour exprimer le terme général $J(f, R)$ en intégrale de surface, il faut déterminer le champ vectoriel \mathbf{v} tel que $\operatorname{div}(\mathbf{v}) = f$. En choisissant v_x , v_y et v_z comme les primitives de f , cette condition est remplie :

$$\begin{aligned} v_x(x, y, z) &= \frac{1}{3} \int_{-\infty}^x f(t, y, z) \, dt \\ v_y(x, y, z) &= \frac{1}{3} \int_{-\infty}^y f(x, t, z) \, dt \\ v_z(x, y, z) &= \frac{1}{3} \int_{-\infty}^z f(x, y, t) \, dt \end{aligned} \quad (5.52)$$

Ainsi, une implémentation de $J(I, R_{in})$ sur le maillage triangulaire donnerait :

$$J(I, R_{in}) \approx \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n a_i \left(\sum_{k=0}^{p_{x_i}} I(k, p_{y_i}, p_{z_i}), \sum_{l=0}^{p_{y_i}} I(p_{x_i}, l, p_{z_i}), \sum_{m=0}^{p_{z_i}} I(p_{x_i}, p_{y_i}, m) \right)^T \cdot \mathbf{n}_i$$

Si nous suivons un raisonnement similaire à celui que nous avons mené avec le théorème de Green-Riemann, (voir l'équation 5.10), l'implémentation de l'énergie de Chan et Vese à l'aide du théorème de Green-Ostrogradski impliquerait de précalculer les images d'intensités cumulées de I et I^2 , et ce dans les directions x , y et z . En considérant que les intensités cumulées soient stockées sur des entiers de 4 octets, la taille mémoire nécessaire pour le stockage de ces six images supplémentaires s'élèverait à 384 Mo pour une image $256 \times 256 \times 256$ et plus de 3 Go pour une image $512 \times 512 \times 512$. Le coût en mémoire n'est pas totalement illusoire au vu des équipements actuels mais demeure suffisamment important pour justifier une méthode basée région moins contraignante. On pourra trouver une implémentation du théorème de Green-Ostrogradski dans les travaux de Staib *et al* [SCD97].

5.2.3 Bande étroite 3D

La plupart des données tridimensionnelles sont des images médicales, acquises par scanner ou IRM, dans lesquelles les structures anatomiques recherchées peuvent être segmentées par des critères région à proximité de leurs frontières. Le principe de la bande étroite est ici appliquée à la surface active pour la segmentation 3D. Dans le cas présent, les bandes \mathcal{B}_{in} et \mathcal{B}_{out} sont des volumes d'épaisseur B de part et d'autre de la surface. Par exemple, si Γ est une sphère, les bandes peuvent être considérées comme des coques d'épaisseur B . La forme générale de l'énergie de région en bande étroite 3D est :

$$E_{\text{région}}(\Gamma) = \iiint_{\mathcal{B}_{in}} (I(\mathbf{x}) - \mu(\mathcal{B}_{in}))^2 d\mathbf{x} + \iiint_{\mathcal{B}_{out}} (I(\mathbf{x}) - \mu(\mathcal{B}_{out}))^2 d\mathbf{x} \quad (5.53)$$

Les surfaces parallèles à Γ permettent de décrire les bords des bandes. Dans [Exn03] et [Luk01], le lecteur pourra trouver une description des propriétés des surfaces parallèles. Par extension de la définition des courbes parallèles, $\Gamma_{[B]}$ est une surface parallèle à Γ si son vecteur position $\mathbf{s}_{[B]}$ est défini comme suit :

$$\mathbf{s}_{[B]}(u, v) = \mathbf{s}(u, v) + B\mathbf{n}(u, v)$$

et de la même façon pour $\Gamma_{[-B]}$. La bande intérieure \mathcal{B}_{in} est le volume situé entre Γ et $\Gamma_{[B]}$, tandis que \mathcal{B}_{out} est délimité par $\Gamma_{[-B]}$ et Γ . Dans ce qui suit, nous donnons une approximation des intégrales de bande d'une fonction f quelconque. Comme dans le cas bidimensionnel, l'approximation des intégrales de bande nous permet d'obtenir une expression adéquate pour l'implémentation de l'énergie de région.

5.2.4 Approximation des intégrales de volume

Nous admettons que Γ est suffisamment régulière et l'épaisseur de bande B suffisamment petite pour que les surfaces $\Gamma_{[B]}$ et $\Gamma_{[-B]}$ soient elles aussi régulières et ne présentent pas d'auto-intersection. En faisant varier b entre 0 et B , nous décrivons l'ensemble des surfaces parallèles comprises entre Γ et $\Gamma_{[B]}$. L'intégrale de volume sur \mathcal{B}_{in} est donc approchée comme la somme des intégrales de surface sur toutes les surfaces parallèles comprises entre Γ et $\Gamma_{[B]}$. $J(f, \mathcal{B}_{in})$ est donc approchée par l'estimateur $\hat{J}(f, \mathcal{B}_{in})$ exprimé comme suit :

$$\begin{aligned} \hat{J}(f, \mathcal{B}_{in}) &= \int_0^B J(f, \Gamma_{[b]}) db \\ &= \int_0^B \iint_{\Omega} I(\mathbf{s}_{[b]}) a_{[b]} \, dudvdb \\ &= \int_0^B \iint_{\Omega} I(\mathbf{s}_{[b]}) \left\| \frac{\partial \mathbf{s}_{[b]}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \mathbf{s}_{[b]}}{\partial v} \right\| \, dudvdb \end{aligned} \quad (5.54)$$

et de même pour $\hat{J}(f, \mathcal{B}_{out})$, en remplaçant B par $-B$. Nous exprimons ici l'élément de surface $a_{[B]}$ en fonction de a . Comme pour l'élément de longueur de la courbe parallèle vu précédemment, l'expression de $a_{[B]}$ va faire intervenir la notion de courbure et nécessite l'introduction de plusieurs concepts de géométrie différentielle [dC76; Pre02]. Dans ce qui suit, nous utilisons les notations indicées pour désigner les dérivées partielles par rapport à u et v :

$$\mathbf{s}_u = \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial u} \quad , \quad \mathbf{s}_{uu} = \frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial u^2} \quad , \quad \dots$$

Au point $\mathbf{s}(u, v)$, les vecteurs tangents principaux et la normale sont :

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_u(u, v) &= \frac{\mathbf{s}_u}{\|\mathbf{s}_u\|} \\ \mathbf{t}_v(u, v) &= \frac{\mathbf{s}_v}{\|\mathbf{s}_v\|} \\ \mathbf{n}(u, v) &= \frac{\mathbf{s}_u \wedge \mathbf{s}_v}{a(u, v)} \end{aligned} \tag{5.55}$$

Les différentes courbures, qui vont intervenir dans la simplification de l'élément de surface, peuvent être définies à l'aide des formes fondamentales. Si \mathcal{T} désigne l'ensemble des vecteurs tangents à Γ , pouvant être générés par combinaison linéaire de \mathbf{s}_u et \mathbf{s}_v (ou de \mathbf{t}_u et \mathbf{t}_v), les formes fondamentales sont des applications bilinéaires symétriques de \mathcal{T} dans \mathbb{R} . Elles permettent de décrire les caractéristiques des surfaces de \mathbb{R}^3 . La première forme fondamentale, notée \mathbf{I} , est le produit scalaire des vecteurs tangents. Elle vérifie :

$$\mathbf{I}(a_1 \mathbf{s}_u + a_2 \mathbf{s}_v, a_1 \mathbf{s}_u + a_2 \mathbf{s}_v) = E a_1^2 + 2F a_1 a_2 + G a_2^2$$

où E , F et G sont les coefficients de la première forme fondamentale :

$$\begin{aligned} E &= \mathbf{s}_u \cdot \mathbf{s}_u = \|\mathbf{s}_u\|^2 \\ F &= \mathbf{s}_u \cdot \mathbf{s}_v \\ G &= \mathbf{s}_v \cdot \mathbf{s}_v = \|\mathbf{s}_v\|^2 \end{aligned} \tag{5.56}$$

de sorte que l'élément de surface peut se réécrire $a = \sqrt{EG - F^2}$. La seconde forme fondamentale, notée \mathbf{II} , est une forme quadratique sur \mathcal{T} satisfaisant :

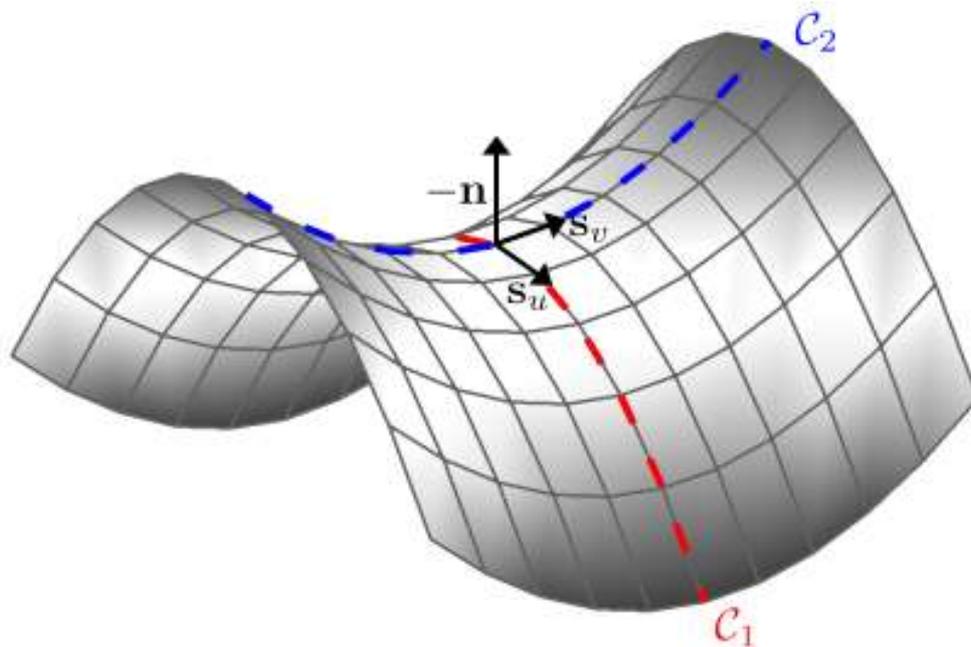
$$\mathbf{II}(a_1 \mathbf{s}_u + a_2 \mathbf{s}_v, a_1 \mathbf{s}_u + a_2 \mathbf{s}_v) = L a_1^2 + 2M a_1 a_2 + N a_2^2$$

où L , M et N sont les coefficients de la seconde forme fondamentale :

$$\begin{aligned} L &= -\mathbf{n}_u \cdot \mathbf{s}_u = \mathbf{n} \cdot \mathbf{s}_{uu} \\ M &= -\mathbf{n}_u \cdot \mathbf{s}_v = -\mathbf{n}_v \cdot \mathbf{s}_u = \mathbf{n} \cdot \mathbf{s}_{uv} \\ N &= -\mathbf{n}_v \cdot \mathbf{s}_v = \mathbf{n} \cdot \mathbf{s}_{vv} \end{aligned} \tag{5.57}$$

Les courbures sont calculables à partir de la matrice de l'endomorphisme de Weingarten \mathbf{W} , construite avec les coefficients de la première et de la seconde forme fondamentale :

$$\mathbf{W} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} GL - FM & GM - FN \\ EM - FL & EN - FM \end{bmatrix} \tag{5.58}$$

FIG. 5.9 – Courbes tangentes à Γ au point $\mathbf{s}(u, v)$

Soit \mathcal{C} une courbe appartenant à Γ passant par le point $\mathbf{s}(u, v)$, et ayant \mathbf{d} comme vecteur tangent en ce point. Notons que \mathbf{d} est à la fois tangent à la courbe et à la surface, il peut donc être exprimé comme une combinaison linéaire de \mathbf{s}_u et \mathbf{s}_v . On appelle courbure normale κ_N dans la direction \mathbf{d} la courbure de la courbe \mathcal{C} au point $\mathbf{s}(u, v)$. Il existe une infinité de courbes \mathcal{C} passant par $\mathbf{s}(u, v)$, chacune donnant une valeur de courbure normale. Sur la figure 5.9, \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 en sont deux exemples. Les courbures principales κ_1 et κ_2 sont respectivement les valeurs maximum et minimum que peut prendre la courbure normale, toutes directions confondues. De plus, ce sont les valeurs propres de \mathbf{W} . La courbure gaussienne κ_G et la courbure moyenne κ_M sont respectivement le produit et la moyenne des courbures principales :

$$\begin{aligned}\kappa_G &= \kappa_1 \kappa_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \\ \kappa_M &= \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2) = \frac{GL - 2FM + EN}{2(EG - F^2)}\end{aligned}\tag{5.59}$$

On notera également que la courbure gaussienne est égale au déterminant de \mathbf{W} , tandis que la courbure moyenne est la demi-trace de \mathbf{W} .

Les notions fondamentales de courbure des surfaces étant définies, considérons l'élément de surface de $\Gamma_{[B]}$. Dans ce qui suit, nous l'exprimons en fonction de a afin de simplifier

l'estimation 5.54. Nous écrivons :

$$\begin{aligned} a_{[B]}^2 &= \left\| \frac{\partial(\mathbf{s} + B\mathbf{n})}{\partial u} \wedge \frac{\partial(\mathbf{s} + B\mathbf{n})}{\partial v} \right\|^2 \\ &= \|(\mathbf{s}_u + B\mathbf{n}_u) \wedge (\mathbf{s}_v + B\mathbf{n}_v)\|^2 \end{aligned} \quad (5.60)$$

Les règles suivantes sont appliquées pour développer les normes quadratiques :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{p} + \mathbf{q}\|^2 &= \|\mathbf{p}\|^2 + \|\mathbf{q}\|^2 + 2(\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}) \\ \|\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}\|^2 &= \|\mathbf{p}\|^2 \|\mathbf{q}\|^2 - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{q})^2 \end{aligned}$$

En ordonnant les termes par puissances croissantes de B et en introduisant les formes fondamentales dès que possible, nous obtenons :

$$a_{[B]}^2 = X_0 + BX_1 + B^2X_2 + B^3X_3 + B^4X_4 \quad (5.61)$$

avec :

$$\begin{aligned} X_0 &= EG - F^2 \\ X_1 &= -2EN - 2LG + 4FM \\ X_2 &= E\|\mathbf{n}_v\|^2 + G\|\mathbf{n}_u\|^2 - 2F\mathbf{n}_u \cdot \mathbf{n}_v + 4LN - 4M^2 \\ X_3 &= -2N\|\mathbf{n}_u\|^2 - 2L\|\mathbf{n}_v\|^2 + 4M\mathbf{n}_u \cdot \mathbf{n}_v \\ X_4 &= \|\mathbf{n}_u\|^2 \|\mathbf{n}_v\|^2 - (\mathbf{n}_u \cdot \mathbf{n}_v)^2 \end{aligned}$$

Les calculs sont détaillés en annexe A.5. Par ailleurs, les vecteurs \mathbf{n}_u et \mathbf{n}_v sont orthogonaux à \mathbf{n} . Les équations de Weingarten, dont on trouvera une présentation dans [CCA92] et [LMM95], expriment les dérivées partielles de la normale dans le plan tangent en $\mathbf{s}(u, v)$, par des combinaisons linéaires des vecteurs tangents :

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_u &= \frac{MF - LG}{EG - F^2} \mathbf{s}_u + \frac{LF - ME}{EG - F^2} \mathbf{s}_v \\ \mathbf{n}_v &= \frac{NF - MG}{EG - F^2} \mathbf{s}_u + \frac{MF - NE}{EG - F^2} \mathbf{s}_v \end{aligned}$$

dont les coefficients sont ceux de la matrice \mathbf{W} . L'hypothèse de paramétrisation orthogonale va nous permettre d'exprimer aisément $a_{[B]}$. Nous admettons que les tangentes \mathbf{s}_u et \mathbf{s}_v sont orthogonales entre elles, de sorte que $\mathbf{s}_u \cdot \mathbf{s}_v = F = 0$. Les paramétrisations usuelles de la plupart des surfaces ne respectent pas cette condition, mis à part quelques exemples simples comme la sphère, le tore et le cylindre. Toutefois, cette hypothèse n'est pas contraignante. D'une part, si \mathbf{s} n'est pas une paramétrisation orthogonale, il est toujours possible de trouver une paramétrisation orthogonale locale $\hat{\mathbf{s}}$ décrivant la surface au voisinage du point $\mathbf{s}(u, v)$. D'autre part, modifier la paramétrisation revient à modifier l'orientation des vecteurs tangents. Or, l'implémentation des quantités différentielles sur le maillage triangulaire est indépendante de cette orientation. Sous la condition de paramétrisation orthogonale, les dérivées de la normale se simplifient :

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_u &= -\frac{L}{E} \mathbf{s}_u - \frac{M}{G} \mathbf{s}_v \\ \mathbf{n}_v &= -\frac{M}{E} \mathbf{s}_u - \frac{N}{G} \mathbf{s}_v \end{aligned} \quad (5.62)$$

ainsi que les courbures gaussienne et moyenne :

$$\begin{aligned}\kappa_G &= \frac{LN - M^2}{EG} \\ \kappa_M &= \frac{GL + EN}{2EG}\end{aligned}\tag{5.63}$$

Dans l'annexe A.5, nous détaillons les calculs amenant aux simplifications suivantes :

$$\begin{aligned}X_0 &= a^2 \\ X_1 &= -4a^2\kappa_M \\ X_2 &= a^2(4\kappa_M^2 + 2\kappa_G) \\ X_3 &= -4a^2\kappa_M\kappa_G \\ X_4 &= a^2\kappa_G^2\end{aligned}\tag{5.64}$$

ce qui nous permet de factoriser $a_{[B]}^2$ en une expression simple dépendant soit des courbures moyennes et gaussiennes, soit des courbures principales :

$$\begin{aligned}a_{[B]}^2 &= a^2(1 - 2B\kappa_M + B^2\kappa_G)^2 \\ &= a^2(1 - B\kappa_1)^2(1 - B\kappa_2)^2\end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned}a_{[B]} &= a |1 - 2B\kappa_M + B^2\kappa_G| \\ &= a |1 - B\kappa_1| |1 - B\kappa_2|\end{aligned}$$

Cette expression se justifie par le fait que les courbures principales sont les courbures des lignes tangentes au point $\mathbf{s}(u, v)$. En effet, considérons que les courbes \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 tangentes en $\mathbf{s}(u, v)$, telles qu'elles sont représentées en figure 5.9, ont pour courbures respectives κ_1 et κ_2 . Leurs vecteurs tangents étant respectivement \mathbf{s}_u et \mathbf{s}_v , leurs éléments de longueurs sont $\ell_1 = \|\mathbf{s}_u\|$ et $\ell_2 = \|\mathbf{s}_v\|$. Etant donné que la paramétrisation de Γ est orthogonale, nous avons :

$$a = \|\mathbf{s}_u \wedge \mathbf{s}_v\| = \|\mathbf{s}_u\| \|\mathbf{s}_v\| = \ell_1 \ell_2$$

L'élément de surface de Γ est l'aire du rectangle de côtés ℓ_1 et ℓ_2 . De même, l'élément de surface $a_{[B]}$ peut être considéré comme l'aire du rectangle dont les côtés sont les éléments de longueur des courbes parallèles. Celles-ci, notées $\mathcal{C}_{1[B]}$ et $\mathcal{C}_{2[B]}$, ont pour éléments de longueurs respectifs $\ell_{1[B]} = \ell_1 |1 - B\kappa_1|$ et $\ell_{2[B]} = \ell_2 |1 - B\kappa_2|$. En développant $\ell_{1[B]}\ell_{2[B]}$, nous retrouvons l'expression de $a_{[B]}$, ce qui prouve la validité du principe de paramétrisation orthogonale.

Si B n'excède pas le rayon de courbure des courbes \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 , leurs courbes parallèles respectives sont simples et régulières et la surface parallèle $\Gamma_{[B]}$ l'est aussi. Nous admettrons par la suite que la surface est suffisamment lisse (ou que les bandes sont suffisamment fines) pour que :

$$-\frac{1}{B} < \kappa_1(u, v) < \frac{1}{B} \quad \text{et} \quad -\frac{1}{B} < \kappa_2(u, v) < \frac{1}{B} \quad \forall (u, v) \in \Omega$$

Si cette condition est vérifiée, nous avons finalement :

$$a_{[B]} = a(1 - 2B\kappa_M + B^2\kappa_G) \quad (5.65)$$

qui est l'expression finale de $a_{[B]}$ en fonction de a , que nous réinjectons dans l'équation 5.54. Par conséquent, l'approximation générale $\hat{J}(f, \mathcal{B}_{in})$ est finalement :

$$\hat{J}(f, \mathcal{B}_{in}) = \int_0^B \iint_{\Omega} a(1 - 2b\kappa_M + b^2\kappa_G) f(\mathbf{s} + b\mathbf{n}) dudvdb \quad (5.66)$$

En posant $f = 1$, nous obtenons le volume des bandes :

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(\mathcal{B}_{in}) &= \iint_{\Omega} a \left(B - B^2\kappa_M + \frac{B^3}{3}\kappa_G \right) dudv \\ \mathcal{V}(\mathcal{B}_{out}) &= \iint_{\Omega} a \left(B + B^2\kappa_M + \frac{B^3}{3}\kappa_G \right) dudv \end{aligned} \quad (5.67)$$

Les intensités moyennes sont :

$$\begin{aligned} \hat{\mu}(\mathcal{B}_{in}) &= \frac{1}{\mathcal{V}(\mathcal{B}_{in})} \hat{J}(I, \mathcal{B}_{in}) = \frac{1}{\mathcal{V}(\mathcal{B}_{in})} \int_0^B \iint_{\Omega} a_{[b]} I(\mathbf{s} + b\mathbf{n}) dudvdb \\ \hat{\mu}(\mathcal{B}_{out}) &= \frac{1}{\mathcal{V}(\mathcal{B}_{out})} \hat{J}(I, \mathcal{B}_{out}) = \frac{1}{\mathcal{V}(\mathcal{B}_{out})} \int_0^B \iint_{\Omega} a_{[-b]} I(\mathbf{s} - b\mathbf{n}) dudvdb \end{aligned} \quad (5.68)$$

d'où l'approximation de l'énergie de région en bande étroite 3D :

$$\begin{aligned} \hat{E}_{\text{région}}(\Gamma) &= \int_0^B \iint_{\Omega} a_{[b]} (I(\mathbf{s} + b\mathbf{n}) - \hat{\mu}(\mathcal{B}_{in}))^2 dudvdb \\ &+ \int_0^B \iint_{\Omega} a_{[-b]} (I(\mathbf{s} - b\mathbf{n}) - \hat{\mu}(\mathcal{B}_{out}))^2 dudvdb \end{aligned} \quad (5.69)$$

5.2.5 Dérivation selon la normale

Contrairement à la démarche qui a été suivie pour le modèle de contour 2D, nous ne présentons pas le calcul de la dérivée fonctionnelle et de l'équation d'Euler-Lagrange du terme de région exact (équation 5.53), de par la lourdeur des équations engendrées par le théorème de Green-Ostrogradski. La projection normale de la dérivée fonctionnelle produit des termes générant des effets de bord (équation 5.36) qui sont évités avec le terme approché. De plus, l'énergie discrète est implémentée à partir de la dérivation de ce dernier. Par ailleurs, nous allons voir que la dérivée directionnelle de 5.69 est l'extension 3D directe

de celle obtenue en 2D. A présent, nous utilisons les outils de dérivation directionnelle pour déterminer :

$$\langle \hat{E}'_{\text{région}}, \mathbf{n} \rangle = \langle \hat{J}((I - \hat{\mu}(\mathcal{B}_{in}))^2, \mathcal{B}_{in})', \mathbf{n} \rangle + \langle \hat{J}((I - \hat{\mu}(\mathcal{B}_{out}))^2, \mathcal{B}_{out})', \mathbf{n} \rangle$$

Pour cela, nous déterminons la dérivée directionnelle des approximations générales $\hat{J}(f, \mathcal{B}_{in})$ et $\hat{J}(f, \mathcal{B}_{out})$ selon la normale. Les calculs, qui sont détaillés dans l'annexe A.6, mènent à :

$$\langle \hat{J}(f, \mathcal{B}_{in})', \mathbf{n} \rangle = a \left((1 - 2B\kappa_M + B^2\kappa_G)f(\mathbf{s} + B\mathbf{n}) - f(\mathbf{s}) \right)$$

Concernant l'intégrale sur la bande extérieure, le même développement est appliqué :

$$\langle \hat{J}(f, \mathcal{B}_{out})', \mathbf{n} \rangle = a \left(f(\mathbf{c}) - (1 + 2B\kappa_M + B^2\kappa_G)f(\mathbf{s} - B\mathbf{n}) \right)$$

Finalement, la dérivée de l'énergie de région approchée dans la direction normale est :

$$\begin{aligned} \langle \hat{E}'_{\text{région}}, \mathbf{n} \rangle &= a \left((I(\mathbf{s}) - \hat{\mu}(\mathcal{B}_{out}))^2 - (I(\mathbf{s}) - \hat{\mu}(\mathcal{B}_{in}))^2 \right) \\ &+ a_{[B]}(I(\mathbf{s}_{[B]}) - \hat{\mu}(\mathcal{B}_{in}))^2 - a_{[-B]}(I(\mathbf{s}_{[-B]}) - \hat{\mu}(\mathcal{B}_{out}))^2 \end{aligned} \quad (5.70)$$

Dans cette expression, nous retrouvons les mêmes éléments que dans son homologue 2D de l'équation 5.39. Globalement, le terme $(I(\mathbf{s}) - \hat{\mu}(\mathcal{B}_{out}))^2 - (I(\mathbf{s}) - \hat{\mu}(\mathcal{B}_{in}))^2$ est positif si $I(\mathbf{s})$ est plus proche de $\hat{\mu}(\mathcal{B}_{in})$ que de $\hat{\mu}(\mathcal{B}_{out})$, ce qui va encourager l'expansion de la surface. Les intensités aux points parallèles $\mathbf{s}_{[B]}$ et $\mathbf{s}_{[-B]}$, pondérées par les éléments de surface correspondants, rentrent également en jeu. L'exemple décrit à la section 5.1.6 s'applique également au cas tridimensionnel.

5.2.6 Implémentation

Discrétisation

La discrétisation de l'énergie de région nécessite en premier lieu l'estimation des quantités différentielles sur le maillage triangulaire. Sachant que l'aire du triangle composé des sommets \mathbf{p}_1 , \mathbf{p}_2 et \mathbf{p}_3 est :

$$\mathcal{A}_{\text{triangle}}([\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3]) = \frac{\|(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \wedge (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3)\|}{2}$$

l'aire de tous les triangles entourant \mathbf{p}_i , notée $\mathcal{A}_{\text{triangles}}(\mathbf{p}_i)$, est calculée en parcourant le voisinage de \mathbf{p}_i :

$$\mathcal{A}_{\text{triangles}}(\mathbf{p}_i) = \sum_{k=1}^{\text{card}(V_i)} \frac{\|(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{V_i[k]}) \wedge (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{V_i[k+1]})\|}{2}$$

L'élément de surface associé au sommet \mathbf{p}_i est alors :

$$a_i = \frac{1}{3} \mathcal{A}_{\text{triangles}}(\mathbf{p}_i) \quad (5.71)$$

de sorte que la somme des éléments d'aires des sommets est égale à la somme des aires de toutes les facettes triangulaires. En parcourant la totalité des triangles voisins de chaque sommet, chaque triangle est considéré trois fois, d'où le facteur $1/3$. Pour estimer les courbures moyenne et gaussienne au sommet \mathbf{p}_i , nous utilisons les opérateurs discrets proposés par Desbrun *et al* [DMSB99] et Meyer *et al* [MDSB02] :

$$\begin{aligned} \kappa_{M_i} &= \frac{1}{4\mathcal{A}_i} \left\| \sum_{j \in V_i} (\cotan \alpha_{ij} + \cotan \beta_{ij})(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j) \right\| \\ \kappa_{G_i} &= \frac{1}{\mathcal{A}_i} \left(2\pi - \sum_{j \in V_i} \theta_{ij} \right) \end{aligned} \quad (5.72)$$

où α_{ij} , β_{ij} et θ_{ij} sont les angles formés par \mathbf{p}_i , \mathbf{p}_j et leurs voisins communs, comme illustré en figure 5.10. La courbure gaussienne est estimée par déficit d'angle. Considérons que les voisins du sommet \mathbf{p}_i sont situés sur un même plan. Plus \mathbf{p}_i est éloigné de ce plan, ce qui se traduit par un pic de plus en plus aigu, plus la somme des θ_{ij} est faible, entraînant ainsi une courbure gaussienne élevée. A l'inverse, lorsque \mathbf{p}_i appartient au plan, générant ainsi une structure plane, la somme des θ_{ij} vaut 2π et la courbure gaussienne est nulle.

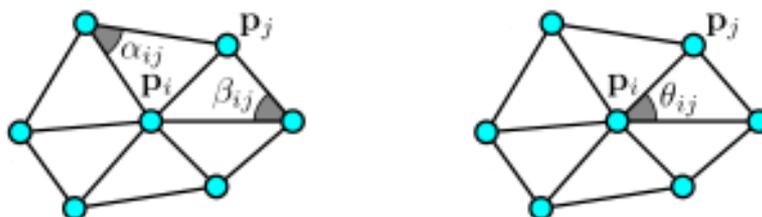


FIG. 5.10 – Angles formés par \mathbf{p}_i et ses voisins pour l'estimation discrète des courbures moyenne et gaussienne sur le maillage

Il est possible d'optimiser le calcul de la courbure moyenne en évitant d'utiliser les fonctions trigonométriques, assez coûteuses en temps de calcul. En notant j_1 , j et j_2 les indices des $k-1$ ^{ième}, k ^{ième} et $k+1$ ^{ième} voisins de \mathbf{p}_i , l'angle α_{ij} est formé par les vecteurs $\mathbf{q}_1 = \mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{j_1}$ et $\mathbf{q}_2 = \mathbf{p}_j - \mathbf{p}_{j_1}$, tandis que β_{ij} est formé par $\mathbf{q}_3 = \mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{j_2}$ et $\mathbf{q}_4 = \mathbf{p}_j - \mathbf{p}_{j_2}$. On a :

$$\cos \alpha_{ij} = \frac{\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2}{\|\mathbf{q}_1\| \cdot \|\mathbf{q}_2\|} \quad \sin \alpha_{ij} = \frac{\|\mathbf{q}_1 \wedge \mathbf{q}_2\|}{\|\mathbf{q}_1\| \cdot \|\mathbf{q}_2\|}$$

Ainsi, la cotangente se développe en :

$$\cotan \alpha_{ij} = \frac{\cos \alpha_{ij}}{\sin \alpha_{ij}} = \frac{\frac{\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2}{\|\mathbf{q}_1\| \cdot \|\mathbf{q}_2\|}}{\frac{\|\mathbf{q}_1 \wedge \mathbf{q}_2\|}{\|\mathbf{q}_1\| \cdot \|\mathbf{q}_2\|}} = \frac{\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2}{\|\mathbf{q}_1 \wedge \mathbf{q}_2\|}$$

et de même pour β_{ij} , en remplaçant \mathbf{q}_1 par \mathbf{q}_3 et \mathbf{q}_2 par \mathbf{q}_4 . Les volumes des bandes et les intensités moyennes sont discrétisés, conformément aux expressions données en 5.67 et 5.68 :

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(\mathcal{B}_{in}) &= \sum_{i=1}^n a_i \left(B - B^2 \kappa_{M_i} + \frac{B^3}{3} \kappa_{G_i} \right) \\ \mathcal{V}(\mathcal{B}_{out}) &= \sum_{i=1}^n a_i \left(B + B^2 \kappa_{M_i} + \frac{B^3}{3} \kappa_{G_i} \right) \\ \hat{\mu}(\mathcal{B}_{in}) &= \frac{1}{\mathcal{V}(\mathcal{B}_{in})} \sum_{i=1}^n \sum_{b=0}^{B-1} a_i (1 - 2b\kappa_{M_i} + b^2\kappa_{G_i}) I(\mathbf{p}_i + b\mathbf{n}_i) \\ \hat{\mu}(\mathcal{B}_{out}) &= \frac{1}{\mathcal{V}(\mathcal{B}_{out})} \sum_{i=1}^n \sum_{b=1}^B a_i (1 + 2b\kappa_{M_i} + b^2\kappa_{G_i}) I(\mathbf{p}_i - b\mathbf{n}_i)\end{aligned}$$

Dans l'algorithme glouton appliqué à la surface active, l'énergie de région à la position testée $\tilde{\mathbf{p}}_i$ dépend de la force de région qui s'applique à \mathbf{p}_i . Cette dernière est une discrétisation de la dérivée directionnelle donnée à l'équation 5.70, évaluée au sommet \mathbf{p}_i :

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_{\text{région}}(\mathbf{p}_i) &= - \left(\left\langle \hat{E}'_{\text{région}}, \mathbf{n} \right\rangle \Big|_{\mathbf{s}(u,v)=\mathbf{p}_i} \right) \mathbf{n}_i \\ &= - [a_i(I(\mathbf{p}_i) - \hat{\mu}(\mathcal{B}_{out}))^2 - a_i(I(\mathbf{p}_i) - \hat{\mu}(\mathcal{B}_{in}))^2 \\ &\quad + a_i(1 - 2B\kappa_{M_i} + B^2\kappa_{G_i})(I(\mathbf{p}_i + B\mathbf{n}_i) - \hat{\mu}(\mathcal{B}_{in}))^2 \\ &\quad - a_i(1 + 2B\kappa_{M_i} + B^2\kappa_{G_i})(I(\mathbf{p}_i - B\mathbf{n}_i) - \hat{\mu}(\mathcal{B}_{out}))^2] \mathbf{n}_i\end{aligned}\tag{5.73}$$

L'énergie à la position testée $\tilde{\mathbf{p}}_i$ pénalise un déplacement $\tilde{\mathbf{p}}_i - \mathbf{p}_i$ allant à l'encontre de la force de région :

$$E_{\text{région}}(\tilde{\mathbf{p}}_i) = -(\tilde{\mathbf{p}}_i - \mathbf{p}_i) \cdot \mathbf{f}_{\text{région+croissance}}\tag{5.74}$$

où $\mathbf{f}_{\text{région+croissance}}$ est une combinaison linéaire de la force définie à l'équation 5.73 et du biais introduit pour le contour 2D à l'équation 5.44.

5.3 Expérimentations

5.3.1 Approximation numérique des intégrales de bandes

Notre approximation des intégrales de bande permet de s'affranchir des intégrales d'aire en 2D et de volume en 3D. Au niveau de l'implémentation numérique, nous évitons ainsi l'emploi d'algorithmes de remplissage pour marquer les pixels appartenant aux bandes. L'implémentation du terme de région approché implique de parcourir les pixels le long de segments de droite définis par les normales des sommets. Ce principe est illustré sur un contour à la figure 5.11(a). Nous distinguons les bandes discrètes réelles, qui contiennent

tous les pixels compris entre Γ et ses courbes parallèles, et les bandes discrètes approchées, qui contiennent les pixels situés sur les segments de droites orthogonaux au contour. La longueur de ces segments est naturellement l'épaisseur de bande B . Sur la figure 5.11(a), les pixels des bandes réelles et approchées sont représentés respectivement en couleur claire et foncée.

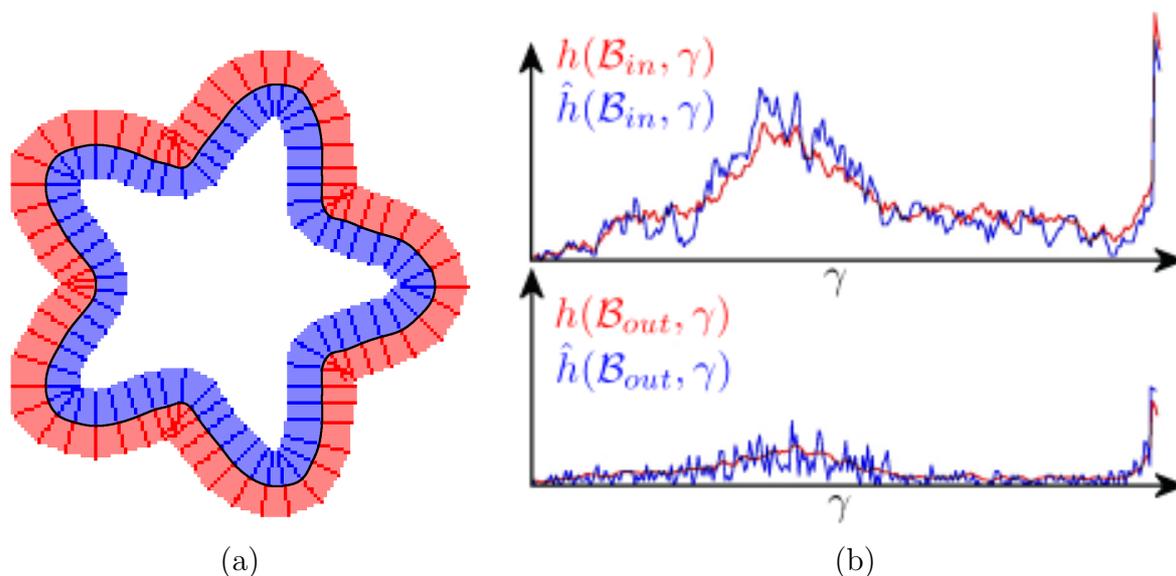


FIG. 5.11 – Evaluation de l'approximation des intégrales de bande sur l'image : (a) Courbe harmonique avec bandes intérieure et extérieure discrétisée (b) Comparaison entre histogramme réel et approché sur la bande intérieure (haut) et extérieure (bas)

Il est évident que nous considérons moins de pixels dans les bandes approchées que dans les bandes réelles, ceci étant d'autant plus vrai que l'épaisseur de bande et la distance entre les sommets \bar{d} sont grandes. Cependant, nous montrons que ce déficit en pixel n'est pas néfaste à une bonne estimation des intensités dans les bandes. Pour cela, nous mesurons l'erreur entre les histogrammes des bandes réelles et ceux des bandes approchées. Nous notons $h(R)$ l'histogramme d'intensité d'une région R , de sorte que $h(R, \gamma)$ est la quantité d'apparition du niveau de gris γ dans R . Dans ce qui suit, nous comparons les histogrammes exacts $h(\mathcal{B}_{in})$ et $h(\mathcal{B}_{out})$ avec leurs homologues approchés $\hat{h}(\mathcal{B}_{in})$ et $\hat{h}(\mathcal{B}_{out})$. Par abus de langage, les histogrammes réel et approché désignent respectivement les histogrammes sur la région réelle et approchée. Pour être comparables, les histogrammes sont normalisés. L'histogramme réel de la bande \mathcal{B}_{in} , pour une intensité donnée γ , est la discrétisation de $J(\delta(I - \gamma), \mathcal{B}_{in})$, où δ est la fonction de Dirac :

$$h(\mathcal{B}_{in}, \gamma) = \frac{1}{\text{card}(\mathcal{B}_{in})} \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{B}_{in}} \delta(I(\mathbf{x}) - \gamma)$$

L'ensemble des \mathbf{x} est déterminé par remplissage de la région. L'histogramme approché

utilise l'approximation $\hat{J}(\delta(I - \gamma), \mathcal{B}_{in})$:

$$\hat{h}(\mathcal{B}_{in}, \gamma) = \frac{1}{\mathcal{A}(\mathcal{B}_{in})} \sum_{i=1}^n \sum_{b=0}^{B-1} \delta(I(\mathbf{p}_i + b\mathbf{n}_i) - \gamma) \ell_i(1 - b\kappa_i)$$

Les histogrammes réel et approché sont obtenus de manière similaire pour la bande \mathcal{B}_{out} . L'utilisation de l'élément $\ell_i(1 - b\kappa_i)$ permet de pondérer l'intensité du point $\mathbf{p}_i + b\mathbf{n}_i$ en fonction de la surface qu'il recouvre. En considérant l'exemple du cercle (dont la courbure est une constante positive), les points situés sur la courbe parallèle extérieure couvrent une plus grande surface que ceux de la courbe initiale et de la courbe intérieure, ce qui est vérifié par la relation $\ell_i(1 - b\kappa_i) < \ell_i < \ell_i(1 + b\kappa_i)$. Dans le modèle de surface active, l'histogramme réel est calculé grâce à un algorithme de remplissage 3D, tandis que l'histogramme approché est calculé d'après l'équation 5.66, en prenant $f = \delta(I - \gamma)$. La différence entre deux histogrammes h_1 et h_2 est la somme des différences en valeur absolue sur l'ensemble des niveaux de gris :

$$E_{\text{histogramme}}(h_1, h_2) = \frac{1}{2} \sum_{\gamma=0}^{\gamma_{\max}} |h_1(\gamma) - h_2(\gamma)|$$

où γ_{\max} est l'intensité maximale dépendante de la quantification des niveaux de gris ($\gamma_{\max} = 255$ pour une image en niveaux de gris 8 bits). Sachant que les histogrammes sont normalisés, le facteur $1/2$ borne l'erreur maximale théorique à 1. Pour évaluer l'erreur commise par notre méthode d'approximation, nous calculons $E_{\text{histogramme}}(h(\mathcal{B}_{in}), \hat{h}(\mathcal{B}_{in}))$ et $E_{\text{histogramme}}(h(\mathcal{B}_{out}), \hat{h}(\mathcal{B}_{out}))$. Une représentation graphique des écarts entre histogrammes est donnée en figure 5.11(b).

Nous avons mesuré les erreurs d'histogrammes sur plusieurs contours et surfaces placés arbitrairement dans une base d'images médicales, comme sur l'exemple de la figure 5.12. Nous avons construit un ensemble de contours et surfaces aléatoires basés sur des harmoniques, celles-ci permettant de générer des formes très variées. En 2D, les contours générés sont de la forme :

$$\begin{cases} x(\theta) = c_x + r(\theta) \cos \theta \\ y(\theta) = c_y + r(\theta) \sin \theta \end{cases}$$

où $\theta \in [0, 2\pi]$ et $(c_x, c_y)^T$ est le barycentre de la courbe. Le rayon r est composé d'un rayon de base α_0 et d'une somme de N_H harmoniques :

$$r(\theta) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{N_H} \alpha_k \cos(m_k \theta)$$

où α_k est l'amplitude et m_k la fréquence de la $k^{\text{ième}}$ harmonique. Les amplitudes sont des réels positifs inférieurs à α_0 et les fréquences sont des entiers positifs. En choisissant aléatoirement le centre, le nombre d'harmoniques, leurs amplitudes et leurs fréquences, une grande variété de courbes est générée.

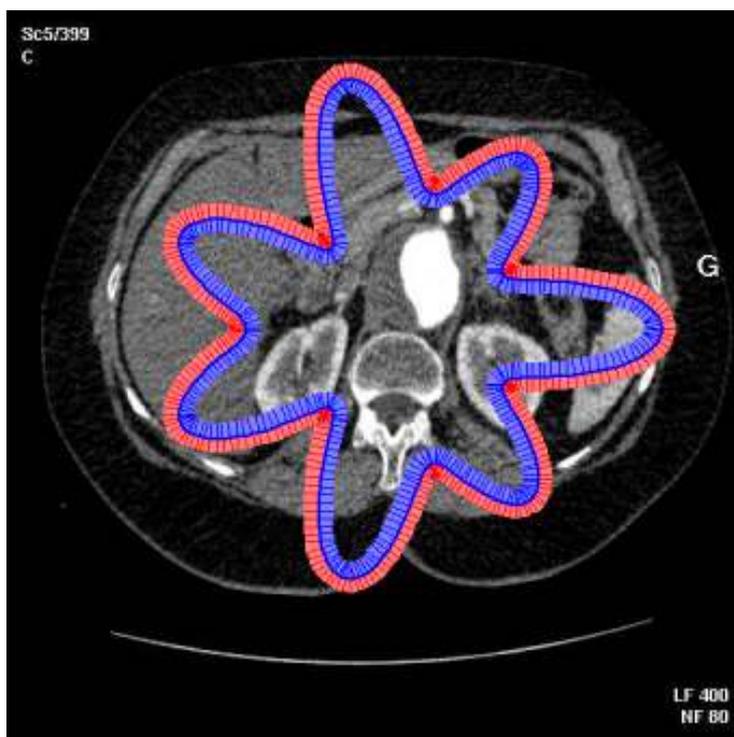


FIG. 5.12 – Exemple de contour harmonique placé aléatoirement dans une image scanner

En 3D, les maillages triangulaires générés se basent sur des surfaces représentées par harmoniques sphériques [Li02; LH04]. Ces surfaces sont de la forme :

$$\begin{cases} x(\phi, \theta) = c_x + r(\phi, \theta) \sin \phi \cos \theta \\ y(\phi, \theta) = c_y + r(\phi, \theta) \sin \phi \sin \theta \\ z(\phi, \theta) = c_z + r(\phi, \theta) \cos \phi \end{cases} \quad (5.75)$$

où $\phi \in [0, \pi]$ et $\theta \in [0, 2\pi]$. Le rayon $r(\phi, \theta)$ est constitué d'un rayon de base α_0 et d'une somme de N_H harmoniques réelles :

$$r(\phi, \theta) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{N_H} \alpha_k \cos(m_k \theta) \cos(n_k \phi) \quad (5.76)$$

Les fréquences de la $k^{\text{ième}}$ harmonique, m_k et n_k , sont les vitesses d'ondulation, respectivement en latitude et en longitude. Elles prennent des valeurs entières positives. Nous avons également généré un ensemble de métasphères [Xu99], qui sont des généralisations des surfaces harmoniques d'ordre 1 :

$$\begin{aligned} x &= c_x + (\alpha_x + \beta_x \cos(m_x \theta) \cos(n_x \phi)) \sin \phi \cos \theta \\ y &= c_y + (\alpha_y + \beta_y \cos(m_y \theta) \cos(n_y \phi)) \sin \phi \sin \theta \\ z &= c_z + (\alpha_z + \beta_z \cos(m_z \theta) \cos(n_z \phi)) \cos \phi \end{aligned} \quad (5.77)$$

Dans le cas d'une métasphère, le rayon de base ainsi que les amplitudes et les fréquences des harmoniques sont différentes sur chaque coordonnée. Sur la figure 5.13, les formes (a),

(b) et (c) sont des surfaces à harmoniques sphériques d'ordre 1, tandis que (d) est une métasphère. Les valeurs des amplitudes et des fréquences correspondantes sont :

- (a) $\alpha_0 = 1, \alpha_1 = 0$
- (b) $\alpha_0 = 1, \alpha_1 = 0.2, m_1 = n_1 = 5$
- (c) $\alpha_0 = (1, 1, 1), \alpha_1 = 0.5$ et $m_1 = n_1 = 10$
- (d) $(\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z) = (1, 0.7, 0.7), (\beta_x, \beta_y, \beta_z) = (0.5, 0.5, 0.5), (m_x, m_y, m_z) = (0, 0, 0),$
 $(n_x, n_y, n_z) = (0, 0, 0)$

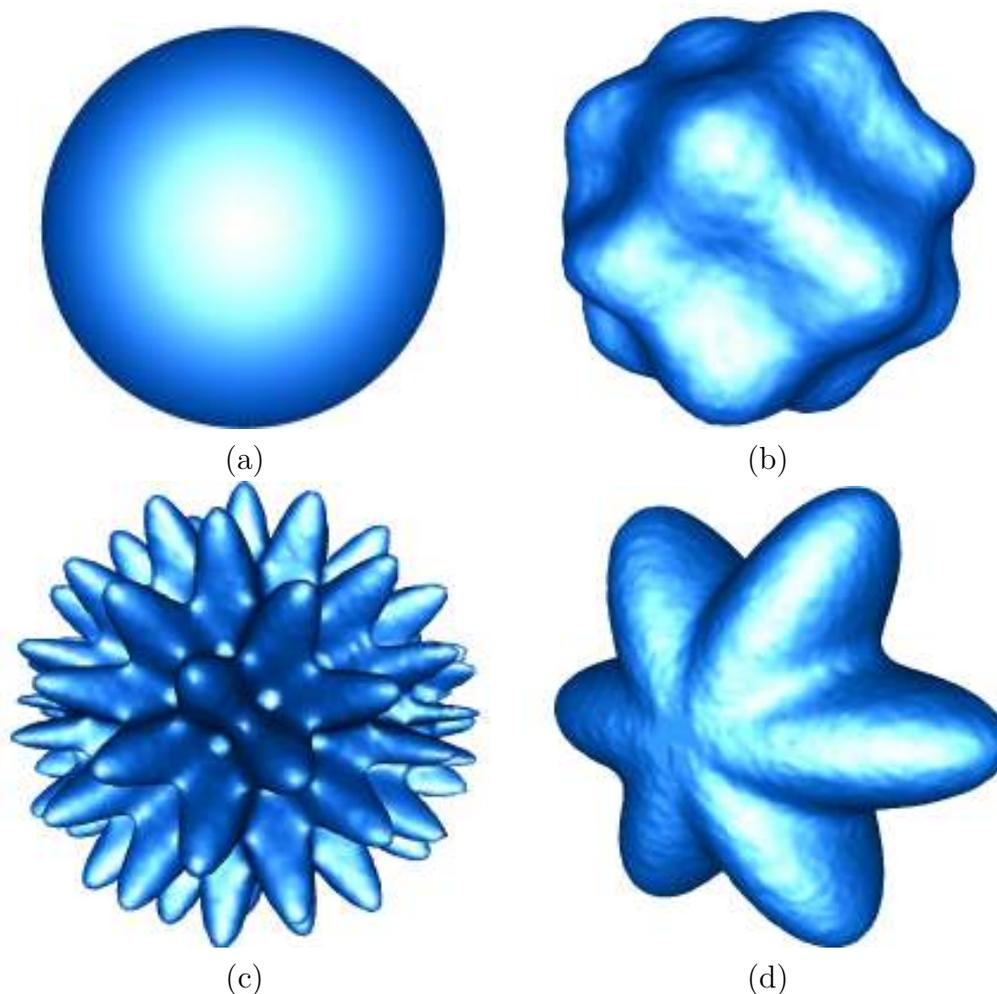


FIG. 5.13 – Surfaces construites à partir d'harmoniques sphériques (a,b,c) et métasphère (d)

Une fois les contours et surfaces placés aléatoirement dans une série d'images, nous avons mesuré les erreurs entre histogrammes réels et histogrammes approchés $E_{\text{histogramme}}(h(\mathcal{B}_{in}), \hat{h}(\mathcal{B}_{in}))$ et $E_{\text{histogramme}}(h(\mathcal{B}_{out}), \hat{h}(\mathcal{B}_{out}))$. Nous avons fait varier l'épaisseur de bande B entre 3 et 20 pixels/voxels, ainsi que la distance minimale w entre sommets voisins de 1 à 10. La plage de variations de B est celle que nous utilisons couram-

w	B	Erreur maximale (2D)	Erreur maximale (3D)
1	3	0.015	0.021
1	20	0.047	0.092
3	3	0.033	0.087
3	20	0.097	0.120
10	3	0.307	0.349
10	20	0.384	0.416

TAB. 5.1 – Erreur maximale sur les histogrammes en fonction de de l'échantillonnage w et de l'épaisseur de bande B

ment pour la segmentation. L'influence de ce paramètre est discutée un peu plus loin. Lors des tests de segmentation, nous utilisons systématiquement $w = 3$, car il s'agit de la taille minimale de la fenêtre de recherche de l'algorithme glouton. Par l'intermédiaire du critère de reparamétrisation (équation 4.24), elle est aussi la valeur qui donne l'échantillonnage le plus fin. Cependant, dans des travaux futurs, nous envisageons d'utiliser des maillages à paramétrisation adaptative [LT05], dans lesquels les sommets sont concentrés dans les zones de fortes courbures. La distance w étant dans ce cas variable, il est intéressant d'étudier son influence sur la précision des bandes. On trouvera dans le tableau 5.1 les erreurs entre histogrammes calculées selon l'équation 5.3.1, pour les modèles 2D et 3D. Les erreurs qui y figurent sont les valeurs maximales obtenues sur l'ensemble de la base d'images, indifféremment sur \mathcal{B}_{in} ou \mathcal{B}_{out} . Comme l'erreur augmente de manière monotone en fonction de w et B , elle est indiquée pour les valeurs limites de ces variables et pour $w = 3$, qui est l'échantillonnage utilisé par défaut.

Il s'est avéré que la distance w était particulièrement influente sur l'erreur, l'épaisseur de bande l'étant dans une moindre mesure. L'erreur maximale est faible pour le réglage ($w = 1$, $B = 3$), mais devient importante avec $w = 10$. Par ailleurs, l'erreur est systématiquement plus importante sur la surface active. Cependant, nous estimons qu'avec un échantillonnage des contours et des surfaces suffisamment fin ($w = 3$), l'approximation de l'intensité sur les bandes est fidèle aux données réelles.

5.3.2 Ensembles de niveaux basés région

Afin de confronter notre approche avec une approche basée région classique, nous avons implémenté un contour et une surface implicites avec l'énergie de région du modèle de Chan et Vese [CV01]. Le modèle implicite réalise une partition de l'image en régions uniformes. L'implémentation des ensembles de niveaux est celle présentée à la section 4.3.2. A la fonction de vitesse définie à l'équation 4.42, nous ajoutons un terme de région :

$$F(\mathbf{x}) = \omega_{\text{courbure}} F_{\text{courbure}}(\mathbf{x}) + \omega_{\text{gradient}} F_{\text{gradient}}(\mathbf{x}) + \omega_{\text{région}} F_{\text{région}}(\mathbf{x}) \quad (5.78)$$

Remarquons que le terme de ballon n'est plus utilisé, à l'instar de l'énergie des modèles explicites, car l'expansion et la dilatation sont désormais assurées par le terme de région. Nous reprenons ce dernier tel qu'il est donné dans [CV01] :

$$F_{\text{région}}(\mathbf{x}) = -(I(\mathbf{x}) - \mu(R_{in}))^2 + (I(\mathbf{x}) - \mu(R_{out}))^2 \quad (5.79)$$

L'interprétation est simple : si l'intensité du pixel considéré \mathbf{x} est plus proche de $\mu(R_{in})$ que de $\mu(R_{out})$, la vitesse $F_{\text{région}}(\mathbf{x})$ sera négative. Le terme de région encouragera la surface à se dilater localement. Comme R_{in} et R_{out} sont les ensembles de points \mathbf{x} pour lesquels $\psi(\mathbf{x})$ est respectivement négative et positive, les intensités moyennes sur le domaine image discret sont :

$$\mu(R_{in}) = \frac{\sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{D}} I(\mathbf{x})(1 - H(\psi(\mathbf{x})))d\mathbf{x}}{\sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{D}} (1 - H(\psi(\mathbf{x})))d\mathbf{x}} \quad \mu(R_{out}) = \frac{\sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{D}} I(\mathbf{x})H(\psi(\mathbf{x}))d\mathbf{x}}{\sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{D}} H(\psi(\mathbf{x}))d\mathbf{x}}$$

où H est l'échelon de Heaviside. A noter que les moyennes ne sont pas calculées telles quelles, en parcourant toute l'image. Avec la méthode d'évolution utilisée, présentée en section 4.3.2, les histogrammes des régions R_{in} et R_{out} sont stockés. Lorsque le pixel \mathbf{x} passe de L_{out} dans L_{in} , son intensité est retirée de l'histogramme $h(R_{out})$ et ajoutée à $h(R_{in})$, et inversement lorsqu'il passe de L_{in} dans L_{out} . Les intensités moyennes sont donc mises à jour par simple parcours des histogrammes, et non de l'image. Celle-ci n'a besoin d'être parcourue qu'une seule fois, au positionnement initial du contour ou de la surface implicite. Remarquons enfin que le modèle implicite décrit ici est équivalent à nos modèles explicites du point de vue de l'énergie. Mise à part la formulation en bande étroite, qui est absente ici, les modèles que nous comparons sont dédiés au même problème de segmentation.

5.3.3 Tests

Les tests présentés ici concernent des données sur lesquelles les modèles uniquement basés contour se sont révélés inefficaces, justifiant ainsi l'intérêt d'une approche région. Lors des tests de segmentation 2D, le contour actif, que ce soit notre modèle ou le contour implicite, est initialisé en un cercle dont la majeure partie est à l'intérieur de la structure à segmenter. Les modèles déformables basés région demeurent sensibles à l'initialisation, dans la mesure où leur croissance s'effectue dans les zones ayant des caractéristiques région semblables à celle de la zone initiale. Comme l'énergie de région nous dispense d'utiliser l'énergie ballon, le mouvement n'est plus contraint dans une direction précise, le contour pouvant se rétracter par endroits et se dilater à d'autres. De la même façon, notre modèle de surface active et la surface implicite sont initialisés en sphères à l'intérieur des structures tridimensionnelles. Le tableau 5.2 compare les temps de calcul obtenus avec notre approche (notée ERBE, pour Energie de Région en Bande Etroite) et ceux obtenus avec la surface implicite (EN, pour Ensembles de Niveaux). Nous comparons également la qualité de segmentation dans le tableau 5.3. Outre les résultats quantitatifs présentés dans les tableaux,

nous analysons certains comportements de notre modèle et des ensembles de niveaux basés région.

Bien que notre modèle et le modèle implicite prévoient toujours un terme de contour pour s'ajuster aux zones de fort gradient, l'énergie de gradient n'est pas nécessaire pour segmenter de nombreuses images. Lorsque les données sont fortement bruitées comme dans le cas d'échographies (figure 5.17), l'influence du terme de gradient est néfaste pour la convergence du modèle. Le bruit génère des frontières parasites qui "piègent" le contour ou la surface et l'empêchent d'atteindre les frontières désirées. Il s'avère que fixer le poids ω_{gradient} à 0 permet d'outrepasser le bruit dans la plupart des cas. L'énergie de gradient est éventuellement prise en compte une fois que le modèle a atteint son état stable, de façon à affiner la segmentation. Jacob *et al* [JBU04] considèrent que le terme de région a pour rôle de déformer la surface pour qu'elle se place aux alentours des frontières, tandis que le terme de gradient positionne précisément la surface sur les bords. Il s'agit d'une caractéristique que nous avons nous-mêmes vérifiée, sur les données présentant des structures aux contours suffisamment marqués, notamment les images acquises par scanner (figure 5.22).

Les poids affectés aux énergies ont été déterminés de manière empirique. Le réglage par défaut des poids de notre modèle est $\omega_{\text{courbure}} = 1$ et $\omega_{\text{région}} = 0.5$. Sur le modèle basé sur les ensembles de niveaux, les poids sont $\omega_{\text{courbure}} = 0.25$ et $\omega_{\text{région}} = 1$. Comme au chapitre 4, la comparaison porte sur le temps de calcul, le nombre d'itérations et les distances de Hausdorff (maximale et moyenne) entre la frontière réelle et la frontière estimée. En fonction de l'application, il est possible de déterminer des valeurs de poids qui conduisent à une segmentation plus rapide mais éventuellement moins précise, l'exemple type étant de pouvoir faire évoluer la surface plus rapidement en diminuant l'influence de l'énergie de courbure, car celle-ci a tendance à s'opposer aux énergies externes. Le risque est alors de passer outre le minimum local souhaité. En revanche, une évolution plus lente, mais qui peut aussi se révéler plus sûre, est obtenue en augmentant ω_{courbure} . Cependant, si la régularisation est trop importante, le contour final risque de ne plus être ajusté aux frontières, qui ne sont pas nécessairement lisses. Après réalisation d'un plan d'expérience, les valeurs données plus haut sont celles qui réalisent globalement le meilleur compromis entre temps de convergence et adéquation aux données. Par ailleurs, lorsque nous utiliserons le lissage gaussien décrit à la section 5.1.7, nous le mentionnerons explicitement.

Globalement, les modèles déformables basés contour, qu'ils soient 2D ou 3D, explicites ou implicites, échouent sur les données médicales, à moins d'être initialisés à proximité des frontières recherchées. En effet, le bruit et les effets de volume partiel génèrent des frontières indistinctes et empêchent l'extraction de bords significatifs par des filtres détecteurs de contours, qui sont par définition locaux. Dans un premier temps, nous mettons en relief le besoin d'avoir des caractéristiques moins locales, en comparant les segmentations obtenues uniquement avec le terme de contour d'un côté ($\omega_{\text{gradient}} = 1$, $\omega_{\text{région}} = 0$) et le terme de région de l'autre ($\omega_{\text{gradient}} = 0$, $\omega_{\text{région}} = 1$). La figure 5.14 illustre les résultats obtenus sur une coupe axiale d'une IRM cérébrale, dans laquelle nous segmentons les ventricules. Le

Image	Taille	Temps (s)		Itérations	
		ERBE	EN	ERBE	EN
Coeur 1 (IRM)	256 × 256	0.178	0.195	100	180
Coeur 2 (IRM)	512 × 512	0.126	0.351	250	300
Rein (Scanner)	512 × 512	0.016	0.113	100	160
Cerveau (IRM)	512 × 512	0.031	0.159	120	200
Souris (US)	592 × 512	0.323	0.716	350	460
Ellipsoïdes	200 × 200 × 200	4.225	45.478	250	240
Abdomen 1 (Scanner)	256 × 256 × 435	1.929	89.618	400	700
Abdomen 2 (Scanner)	512 × 512 × 800	14.523	348.539	840	1500
Cerveau (IRM)	512 × 512 × 300	0.985	57.552	380	450

TAB. 5.2 – Comparaison du nombre d’itérations et du temps de calcul en secondes entre les modèles explicites utilisant l’Energie de Région en Bande Etroite (ERBE) et les ensembles de niveaux (EN)

Image	Taille	Distance H_{mean}		Distance H	
		ERBE	EN	ERBE	EN
Coeur 1 (IRM)	256 × 256	0.54	0.68	2.32	2.78
Coeur 2 (IRM)	512 × 512	5.29	5.45	22.67	24.12
Rein (Scanner)	512 × 512	0.22	1.05	4.24	8.06
Cerveau (IRM)	512 × 512	2.35	8.74	9.43	28.53
Souris (US)	592 × 512	4.11	4.04	15.00	19.00
Ellipsoïdes	200 × 200 × 200	0.86	0.84	5.76	15.47
Abdomen 1 (Scanner)	256 × 256 × 435	0.76	18.56	8.14	> 50
Abdomen 2 (Scanner)	512 × 512 × 800	1.07	26.47	13.37	> 50
Cerveau (IRM)	512 × 512 × 300	0.72	4.43	11.09	> 50

TAB. 5.3 – Comparaison des distances de Hausdorff, en pixels/voxels, entre les modèles explicites utilisant l’Energie de Région en Bande Etroite (ERBE) et les ensembles de niveaux (EN)

contour basé gradient ne parvient pas à se stabiliser sur les bords du ventricule (5.14a), contrairement au contour basé région (5.14b). En augmentant ω_{gradient} , le contour se stabilise sur les frontières mais est gêné par des frontières parasites générées par le bruit. Le contour par ensembles de niveaux, qui lui est basé région, segmente le ventricule mais génère des erreurs topologiques à l’intérieur (5.14c).

En figure 5.15, nous représentons les résultats obtenus lors de la segmentation d’un rein dans une coupe axiale en scanner abdominal, à comparer avec la segmentation experte. Le contour implicite a tendance à fuir au delà des frontières, ce qui est visible à la jonction

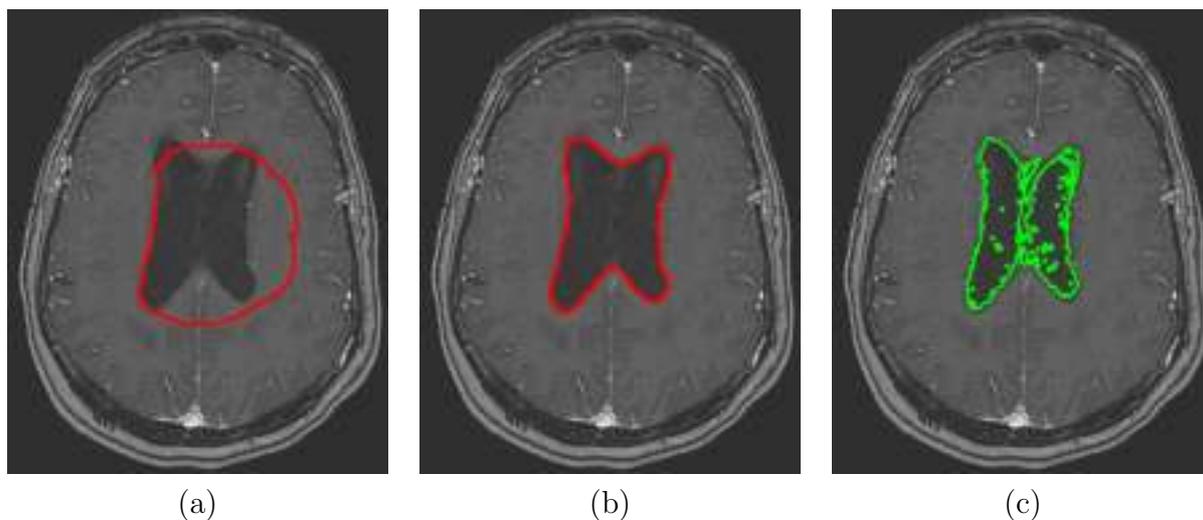


FIG. 5.14 – Segmentation des ventricules en IRM cérébrale (coupe axiale). (a) Notre modèle avec énergie de gradient (b) Notre modèle avec énergie de région en bande étroite (c) Ensembles de niveaux avec terme de région

du rein et de la veine. La figure 5.16 illustre un cas où les deux modèles de contour commettent la même erreur, sur une coupe du cœur en IRM 4 cavités. La zone segmentée est la cavité cardiaque, regroupant les ventricules gauche et droit ainsi que les oreillettes gauche et droite, qui apparaissent en gris clair. Le myocarde, plus sombre, est exclu de la cavité. D'après les chiffres figurant dans le tableau 5.3, notre approche réalise une meilleure segmentation en regard de la vérité terrain, ce qui n'est pas aisément décelable sur la figure 5.16. Cependant, il est intéressant de remarquer que notre approche et les ensembles de niveaux commettent la même erreur. Dans les deux cas, le contour englobe une partie d'une structure avoisinante. Ce défaut est inhérent aux approches région, qui se basent uniquement sur des critères d'intensité. Une structure voisine ayant une intensité proche est systématiquement englobée dans la région intérieure, que nous utilisons le principe de la bande étroite ou non. Ce phénomène de fuite pourrait être résolu par l'ajout d'une contrainte forte sur la rigidité du contour. L'inconvénient d'une telle approche est qu'il est difficile d'appliquer un lissage localisé à des endroits précis du contour. Dans le cas d'une application spécifique comme la segmentation d'une structure anatomique en particulier, l'emploi de modèles déformables incorporant des connaissances *a priori* sur la géométrie des objets doit être envisagé. Les modèles de formes actives [CCTG95; CET01] présentés au chapitre 2 en sont un exemple. Ainsi, l'ajout d'*a priori* de forme à nos modèles déformables discrets est une des perspectives de nos travaux.

Les images échographiques acquises par ultrasons sont généralement affectées par le phénomène de *speckle*, assimilé à un bruit multiplicatif. Il s'agit donc d'images particulièrement dégradées, en comparaison avec les données rencontrées en imagerie par scanner ou IRM. Les méthodes de réduction de bruit par diffusion anisotrope [PM90; YA02] ou d'ex-

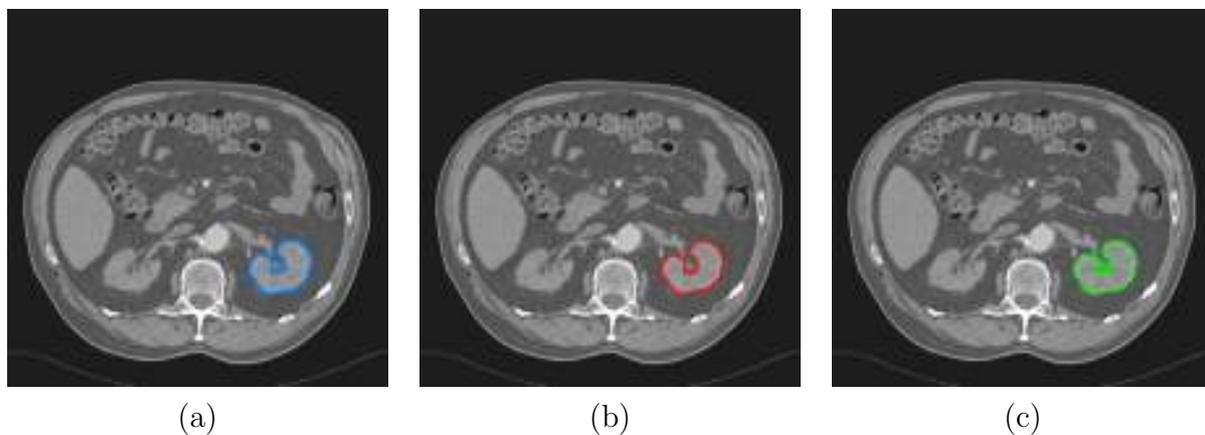


FIG. 5.15 – Segmentation du rein en scanner abdominal : (a) Vérité terrain (b) Notre modèle avec énergie de région en bande étroite (c) Ensembles de niveaux

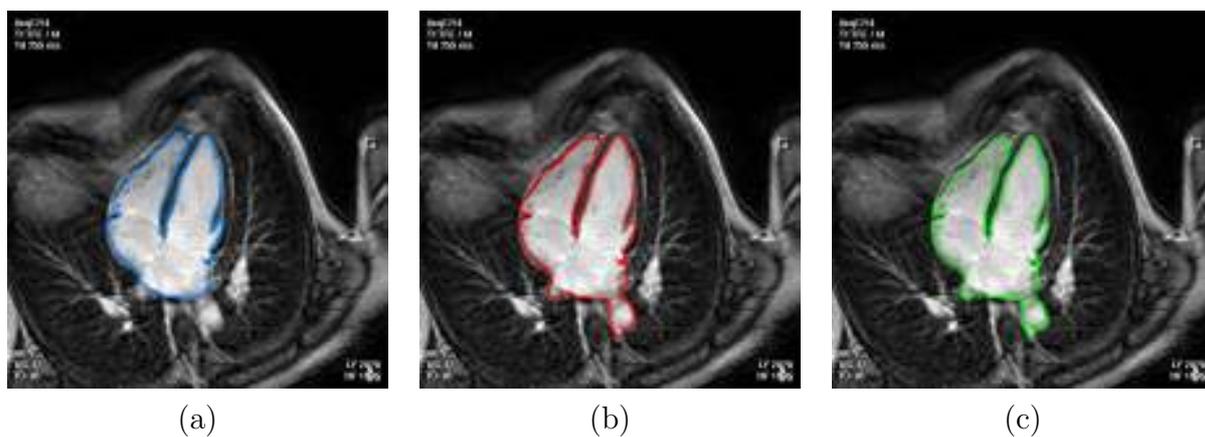


FIG. 5.16 – Segmentation du cœur (ventricules gauche et droit + oreillettes gauche et droite) en IRM 4 cavités : (a) Vérité terrain (b) Notre modèle avec énergie de région en bande étroite (c) Ensembles de niveaux

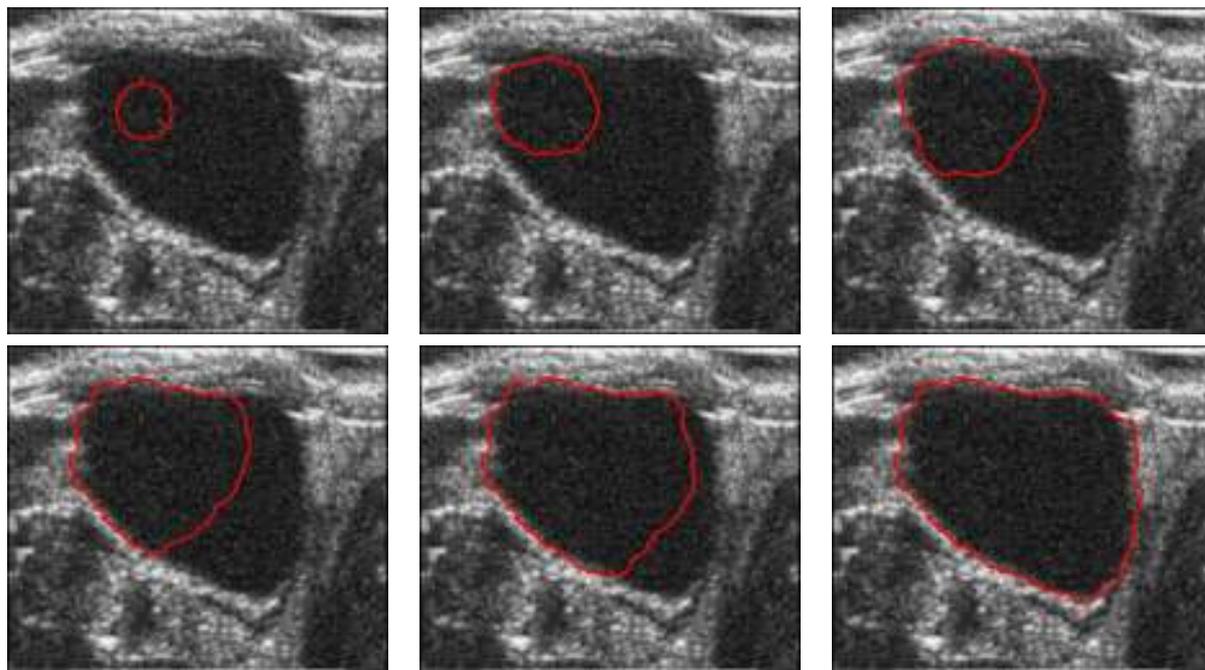


FIG. 5.17 – Segmentation d’une vessie de souris en imagerie ultrasonore

traction de textures [RYHP93; WL07] sont souvent utilisées en imagerie ultrasonore pour permettre la segmentation de régions aux frontières incertaines. La figure 5.17 représente l’évolution du contour dans une image échographique à intervalles de 50 itérations. Sur ce type d’images, il s’est avéré nécessaire d’utiliser le lissage gaussien en augmentant ω_{courbure} . Malgré le manque de définition des parois, le contour actif parvient à se stabiliser sur les frontières les plus ”probables”. Les valeurs élevées des distances de Hausdorff figurant dans le tableau 5.3 sont dues à une segmentation experte inévitablement imprécise.

Un nouveau paramètre introduit par notre énergie de région est l’épaisseur de bande B dont nous discutons le choix. Son ordre de grandeur a peu d’effet sur le coût calculatoire, puisque seul le calcul des intensités moyennes $\hat{\mu}(\mathcal{B}_{in})$ et $\hat{\mu}(\mathcal{B}_{out})$ a une complexité algorithmique en $O(nB)$. La principale caractéristique influençant l’épaisseur de bande minimale est la définition des contours. Le modèle déformable nécessite des bandes d’autant plus larges que les frontières de l’objet recherché sont floues. Pour vérifier ce principe, nous avons appliqué le contour actif sur des séries d’images construites à partir de données lissées avec des filtres gaussiens d’écart-type croissant, comme illustré en figure 5.18. Pour l’image originale, dont les contours sont bien marqués, une épaisseur de bande de 2 pixels est suffisante. Il s’avère ensuite nécessaire de l’augmenter à $B = 4$ pour $\sigma = 6$ et $B = 7$ pour $\sigma = 12$. Avec des bandes plus étroites, il se produit une fuite du contour dans les objets environnants. Il est rare de rencontrer un niveau de flou comme celui obtenu avec $\sigma = 12$, une épaisseur de bande de 5 pixels s’est donc révélée suffisante pour les autres tests.

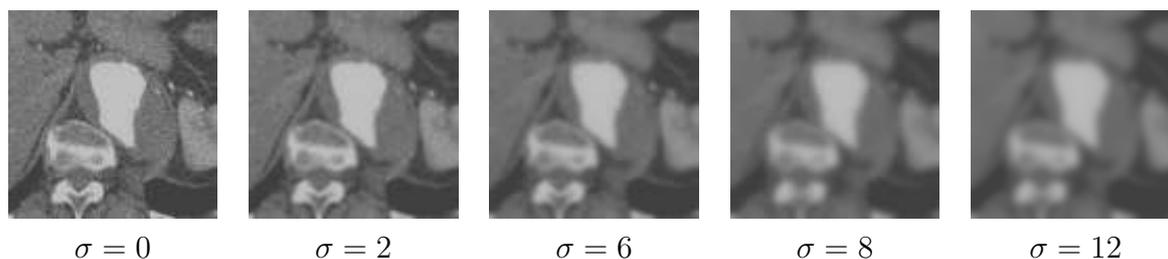


FIG. 5.18 – Flous gaussiens successifs pour l'estimation de l'épaisseur de bande nécessaire

A présent, nous décrivons les expérimentations menées sur des images tridimensionnelles, en confrontant notre surface active munie de l'énergie de région en bande étroite à la surface implicite. Un test mené sur une image synthétique est illustré en figure 5.19. Les modèles déformables basés gradient, qu'ils soient explicites ou implicites, sont relativement efficaces sur des images synthétiques dégradées artificiellement par un bruit gaussien. En effet, un filtrage gaussien permet généralement un débruitage suffisant pour obtenir des régions homogènes et extraire des gradients significatifs. Afin de tester la robustesse de notre approche région, l'image est dégradée avec un bruit impulsif. L'intensité des voxels est inversée avec une probabilité de 0.35. La figure 5.19(a) représente l'image produite par le bruit impulsif et la figure 5.19(b) sa version lissée par un filtrage gaussien d'écart-type $\sigma = 3$. L'objet à segmenter et le fond demeurent non-uniformes après l'étape de lissage, cependant leurs intensités moyennes sont suffisamment éloignées l'une de l'autre pour que l'image se prête à une segmentation en régions. Dans ce cas, on peut s'attendre à ce que le modèle de Chan et Vese soit efficace et que l'amélioration apportée par la bande étroite soit uniquement calculatoire. Notre modèle de maillage permet une reconstruction fidèle de l'objet, à condition d'utiliser le lissage gaussien de surface. Quant à la surface implicite, elle reconnaît les frontières extérieures mais cette segmentation est accompagnée d'erreurs topologiques créées par des frontières parasites à l'intérieur de l'objet, phénomène déjà rencontré auparavant (figure 5.14). Cela conduit à une distance de Hausdorff élevée (voir tableau 5.3), en comparaison avec celle obtenue par notre méthode. Ici, la supériorité de notre approche est avant tout due à la représentation utilisée plutôt qu'à l'utilisation de la bande étroite. De par leur représentation explicite, les approches par maillages sont plus facilement contrôlables que les approches par ensembles de niveaux. Dans de futurs travaux, nous envisageons une méthode de régularisation diffuse des ensembles de niveaux.

La figure 5.20 fournit une représentation 3D des ventricules du cerveau, construite à partir d'une suite de coupes IRM axiales. Etant donné que la segmentation experte séparait les deux ventricules cérébraux, nous avons utilisé deux surfaces actives indépendantes, comme elles apparaissent en 5.20(droite). Ce type d'image en particulier permet de justifier le principe de la bande étroite. En conservant l'image initiale, nous ne sommes pas parvenus à segmenter correctement les bords des ventricules, la raison étant la similitude des intensités moyennes de la zone d'intérêt et de l'arrière-plan. Sont considérées comme faisant partie de l'arrière-plan toutes les zones n'appartenant pas au ventricule, ce qui englobe la matière

grise, la matière blanche ainsi que le fond noir. Par conséquent, l'arrière-plan, en plus de ne pas être uniforme, a une intensité moyenne faible, donc proche de celle de la structure à segmenter. En réduisant l'image au rectangle englobant des ventricules, l'intensité moyenne de l'arrière-plan s'est trouvée réhaussée et donc suffisamment différente de celle des ventricules pour permettre la segmentation par la surface implicite. Ceci confirme le principe de la bande étroite, en ce sens que de nombreuses structures peuvent être segmentées par un critère région au voisinage de leurs frontières.

Finalement, nous avons appliqué notre modèle de surface active et les ensembles de niveaux sur des tomodensitométries de l'abdomen, dans lesquelles nous segmentons l'aorte. Parmi ces images, certaines ont déjà fait l'objet de tests lors des comparaisons des méthodes d'évolution au chapitre 4, car elles pouvaient être partiellement segmentées avec des modèles basés uniquement contour. L'utilisation du terme de région a néanmoins permis de renforcer la capacité de la surface à croître dans des structures tubulaires telles que l'aorte. Comme le montre la figure 5.22, à partir d'une initialisation en sphère de taille réduite à l'intérieur du vaisseau, notre surface active parvient à segmenter la majeure partie de l'artère, de la crosse aortique (en haut à gauche sur la figure) jusqu'aux artères illiaques (en bas à droite). Par ailleurs, elle parvient à explorer les veines étroites partant de l'aorte, ce qui était impossible avec une approche gradient. En effet, dans les structures étroites, les frontières extraites par les filtres détecteurs de contour (Sobel, Zucker-Hummel, ...) situées les unes en faces des autres ont tendance à se recouvrir, masquant ainsi la structure réelle. Avec une méthode utilisant des caractéristiques région, ces structures sont à nouveau visibles du point de vue du modèle déformable. De par leur représentation discrétisée à la même résolution que celle de l'image, les surfaces implicites sont aussi aptes à croître dans des structures très étroites ou anguleuses, comme le ferait une croissance de région. Cependant, cette capacité se révèle problématique lorsque les frontières de la région d'intérêt présentent des discontinuités, provoquant ainsi des fuites de la surface dans les structures voisines. Ce phénomène est inhérent à la représentation des ensembles de niveaux et à la formulation implicite de leur courbure. La figure 5.21 représente des plans de coupes axiaux issus de deux volumes de données différents, où l'on peut observer l'intersection des plans avec notre surface explicite (en rouge) et la surface implicite (en vert). La propagation des ensembles de niveaux dans les régions voisines, qui est ici flagrante, a pu être évitée en rétablissant l'influence de l'énergie de gradient ($\omega_{\text{gradient}} = 1$) et en augmentant ω_{courbure} à 2, mais avec une moindre exploration du vaisseau sanguin. Les résultats des ensembles de niveaux figurant aux tableaux 5.2 et 5.3 sont ceux obtenus avec l'énergie de région.

5.4 Discussion

Dans ce chapitre, nous avons développé un nouveau type d'énergie de région. Basée sur le principe de la bande étroite, la formulation de cette énergie permet une approximation mathématique propice à son implémentation sur nos modèles déformables explicites. Cette

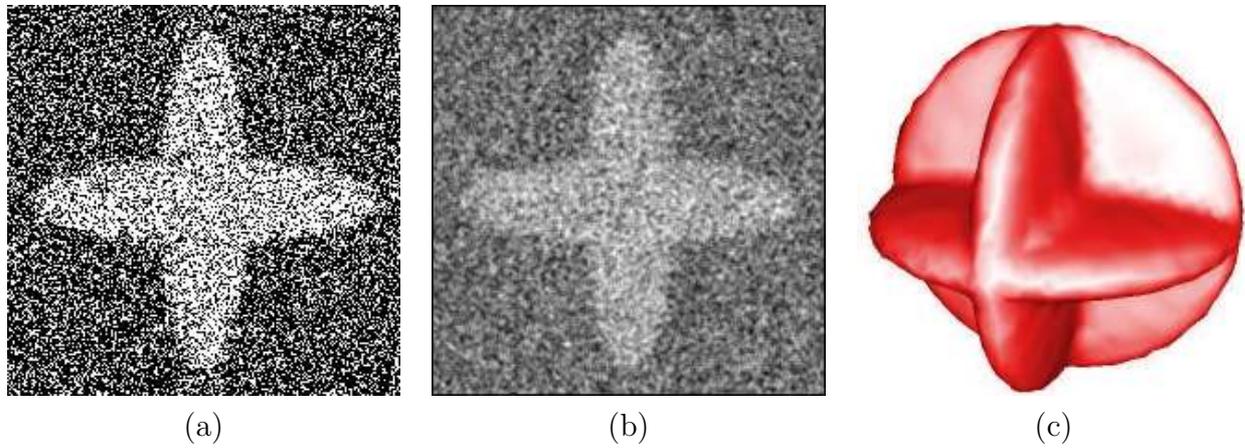


FIG. 5.19 – Segmentation d’une image synthétique 3D avec bruit impulsionnel : (a) Image initiale (b) Image lissée avec filtre gaussien (c) Reconstruction obtenue avec notre modèle après lissage gaussien de la surface

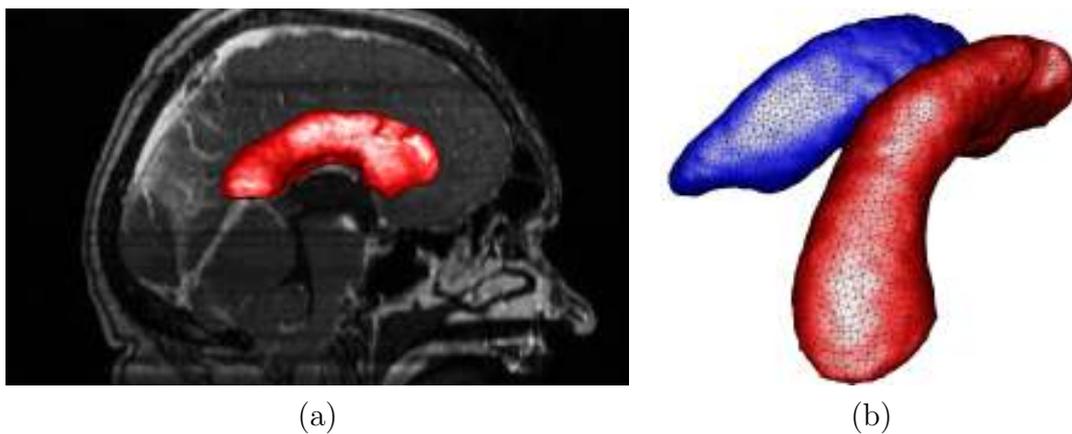


FIG. 5.20 – Segmentation des ventricules cérébraux en IRM 3D : (a) Surface superposée au plan sagittal (b) Segmentation indépendante des deux ventricules

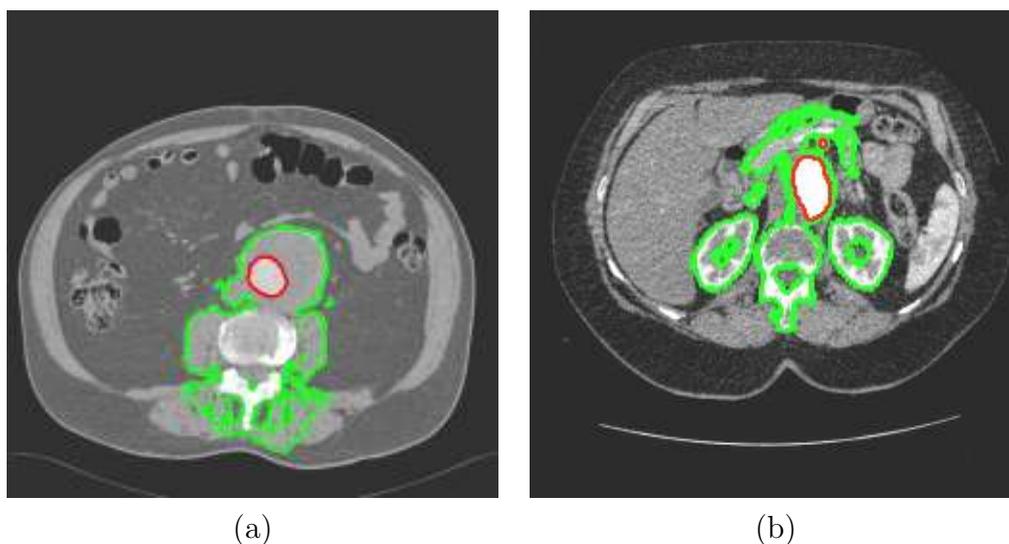


FIG. 5.21 – Segmentation de l’aorte en scanner 3D, avec mise en évidence du phénomène de fuite de contour des ensembles de niveaux (en vert) par rapport à la surface active explicite (en rouge). Les coupes (a) et (b) proviennent de patients différents

approximation repose sur le concept des courbes et surfaces parallèles, qui mène à une simplification des intégrales de région en sommes d’intégrales de contour en 2D et d’intégrales de surface en 3D. Afin de justifier cette approximation, nous avons mené un raisonnement mathématique prenant comme point de départ les expressions exacte et approchée de l’énergie de région. Pour étudier la minimisation de l’énergie de région de manière rigoureuse, nous avons déterminé l’équation d’Euler-Lagrange du terme exact par le calcul des variations. Nous avons formulé la condition de minimalité du terme approché en utilisant la dérivation directionnelle selon la normale au contour et à la surface. Une comparaison des équations d’évolution obtenues à partir du terme exact et du terme approché nous a permis de justifier ce dernier. Finalement, les tests de segmentation menés sur une série d’images médicales ont validé le principe de région en bande étroite. Nous avons réussi à conserver les avantages des modèles déformables basés région classiques, que sont la robustesse au bruit et aux frontières indistinctes. En comparant notre modèle déformable muni de notre énergie avec une implémentation en ensembles de niveaux dotée d’une énergie de région classique, nous avons mis en évidence l’intérêt de la bande étroite.

Cependant, dans certains tests, la supériorité de notre modèle sur les ensembles de niveaux n’est pas uniquement imputable à l’utilisation de l’énergie de région en bande étroite. Elle est également due à la méthode de représentation même. En effet, l’énergie de courbure des modèles explicites a un pouvoir régularisant supérieur à celle des ensembles de niveaux, qui est plus locale. Par ailleurs, les ensembles de niveaux étant totalement libres d’un point de vue topologique, ils génèrent plus facilement des frontières parasites qui détériorent la qualité de segmentation. En comparant les approches explicites et implicites, nous devons garder à l’esprit que leur aptitude à la régularisation est différente.

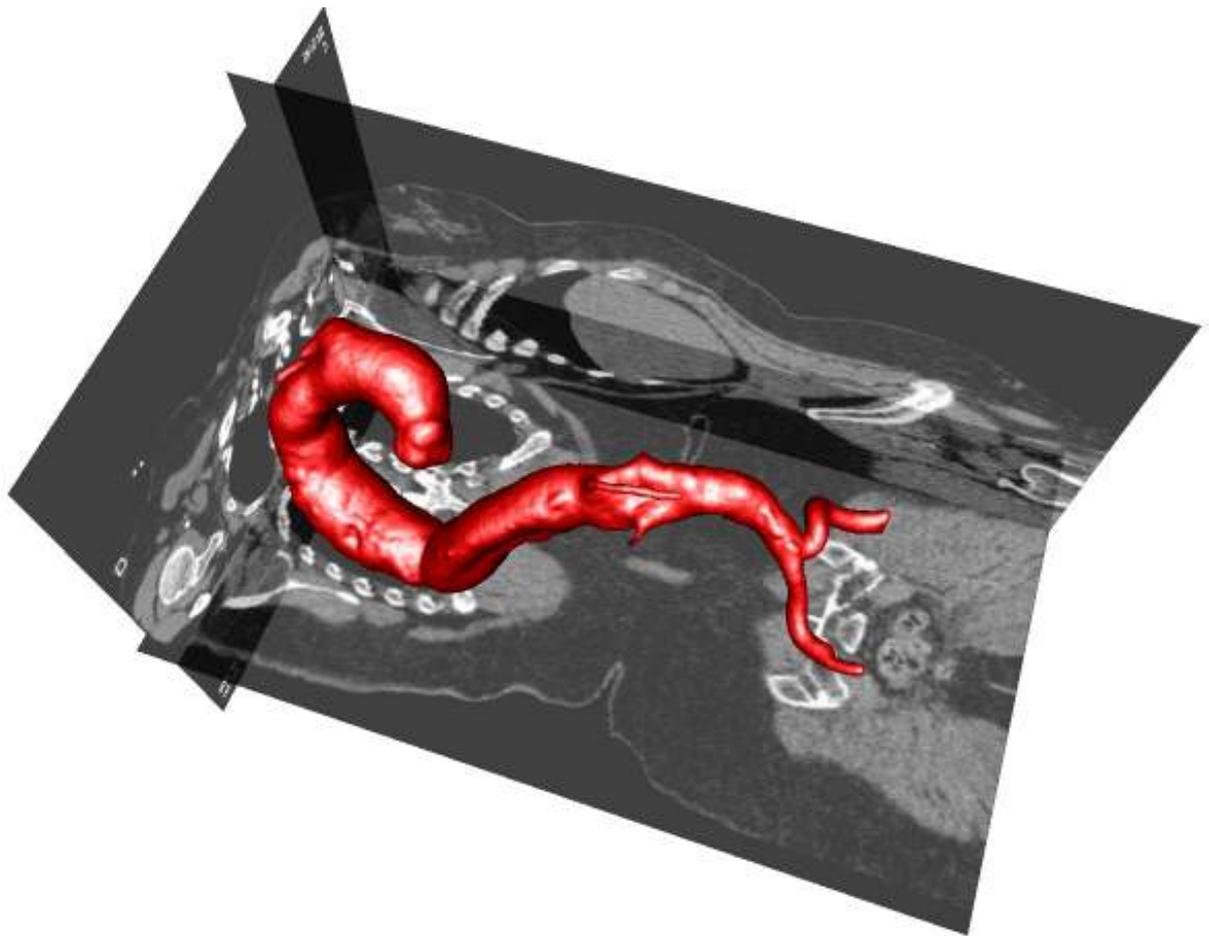


FIG. 5.22 – Reconstruction 3D de l'aorte abdominale en scanner 3D

Dans des travaux futurs, afin d'approfondir la justification du principe de la bande étroite, nous comparerons l'énergie de région classique et l'énergie de région en bande étroite sur la même représentation de contour et de surface. L'énergie de région classique, calculée sur l'intégralité des régions intérieures et extérieures, sera implémentée sur nos modèles explicites à l'aide des théorèmes de Green-Riemann et Green-Ostrogradski. Parallèlement, l'énergie de région en bande étroite sera intégrée aux modèles implicites. Nous envisageons également de développer une méthode de lissage diffus sur les ensembles de niveaux, afin d'obtenir une régularisation aussi efficace que celle des modèles explicites.

Chapitre 6

Modèle de surface 3D+T pour le suivi dans des séquences cardiaques

Jusqu'à présent, nous avons développé des modèles déformables génériques pour la segmentation d'images fixes, qu'elles soient 2D ou 3D. En imagerie médicale, les différentes techniques d'acquisition sont capables de produire des séquences d'images 3D, c'est-à-dire des volumes de données variant au cours du temps. Celui-ci est considéré comme une dimension supplémentaire et on parle ainsi de données 4D ou plus exactement 3D+T. Les séquences ont généralement pour finalité d'étudier le comportement dynamique d'une ou plusieurs structure(s) anatomique(s), ce qui implique de suivre le mouvement de ces structures au cours du temps. En particulier, le suivi du mouvement du ventricule gauche au cours du cycle cardiaque est un aspect fondamental de l'étude des pathologies cardiovasculaires. De plus, il constitue une application majeure des modèles déformables, c'est pourquoi nous souhaitons appliquer notre méthode de surface active sur des séquences d'images du cœur.

Le plus souvent, le suivi d'objets déformables est abordé de manière séquentielle. Une segmentation à l'instant initial est propagée aux instants suivants en utilisant une modélisation du mouvement. A l'inverse, nous considérons les aspects de segmentation et de suivi dans le même processus d'optimisation. En envisageant le temps comme une dimension supplémentaire, le problème de suivi est ramené à un problème de segmentation 3D+T. Nous développons un modèle de surface active 3D+T en étendant le formalisme 3D développé aux chapitres 3 et 5. A partir d'une surface 3D+T générique, nous dérivons un modèle de topologie cylindrique adapté au suivi du ventricule dans des séquences cardiaques en Imagerie par Résonance Magnétique (IRM).

Dans un premier temps, nous présentons les notions fondamentales d'anatomie du cœur ainsi que les conditions d'acquisition des séquences IRM. Nous développons ensuite le modèle générique pour le suivi d'objets déformables en séquences 3D. La surface active

3D+T est une extension de la surface 3D à un problème de dimension supérieure. La fonctionnelle d'énergie comporte notamment une énergie de régularisation permettant la prise en compte de la cohérence temporelle de l'objet à segmenter. La surface est liée à l'image par un terme de gradient et plus particulièrement par une extension 3D+T du terme de région en bande étroite présenté au chapitre 5. Les données IRM nécessitent une spécialisation du modèle générique pour le suivi du ventricule. Nous adaptons notamment la topologie et les énergies de notre modèle afin qu'il soit en adéquation avec les données cardiaques. Après une description de la discrétisation du modèle et des énergies, la méthode est validée sur une base de séquences cardiaques acquises sur des patients sains et pathologiques. Les expérimentations comportent une comparaison avec les vérités terrain ainsi qu'une étude des fractions d'éjection. Nos travaux concernant le suivi du ventricule ont été publiés dans [MBMC07c] et [MBMC07d].

6.1 Le cœur : anatomie et acquisition

6.1.1 Fonctionnement

Le cœur est un muscle creux qui joue le rôle de pompe, aspirant le sang provenant du système veineux et le propulsant dans le système artériel. Il est formé essentiellement d'une partie musculaire, le myocarde, et de quatre cavités : les deux oreillettes et les deux ventricules. Le terme *atrium* est également employé pour désigner les oreillettes. Les cavités droite et gauche sont totalement séparées par une cloison, le *septum*. La figure 6.1 représente un schéma du cœur dans lequel les quatre cavités ainsi que les vaisseaux sanguins principaux sont visibles. Le myocarde est tapissé par des membranes : l'épicarde à l'extérieur et l'endocarde à l'intérieur.

La partie droite assure la circulation du sang pauvre en oxygène recueilli par les veines caves : ce sang aboutit dans l'oreillette droite et est éjecté dans le ventricule droit. Le sang est ensuite éjecté vers les poumons via l'artère pulmonaire. Une fois oxygéné, le sang revient des poumons vers la partie gauche via les veines pulmonaires. Le ventricule gauche, plus puissant que le droit, est la chambre pompante principale. Il a pour rôle de propulser le sang oxygéné dans tout l'organisme (excepté les poumons) via l'artère aorte. Le cycle cardiaque consiste en trois étapes majeures : la systole auriculaire, la systole ventriculaire et la diastole. Au début du cycle cardiaque le sang remplit les oreillettes droite et gauche. Au cours de la systole auriculaire, les oreillettes se contractent et éjectent du sang vers les ventricules. Les valves mitrales et tricuspide se ferment pour empêcher le reflux vers les oreillettes. La systole ventriculaire implique la contraction des ventricules, expulsant le sang vers le système circulatoire. Enfin, la diastole est la relaxation de toutes les parties du cœur, permettant le remplissage (passif) des ventricules et l'arrivée de nouveau sang.

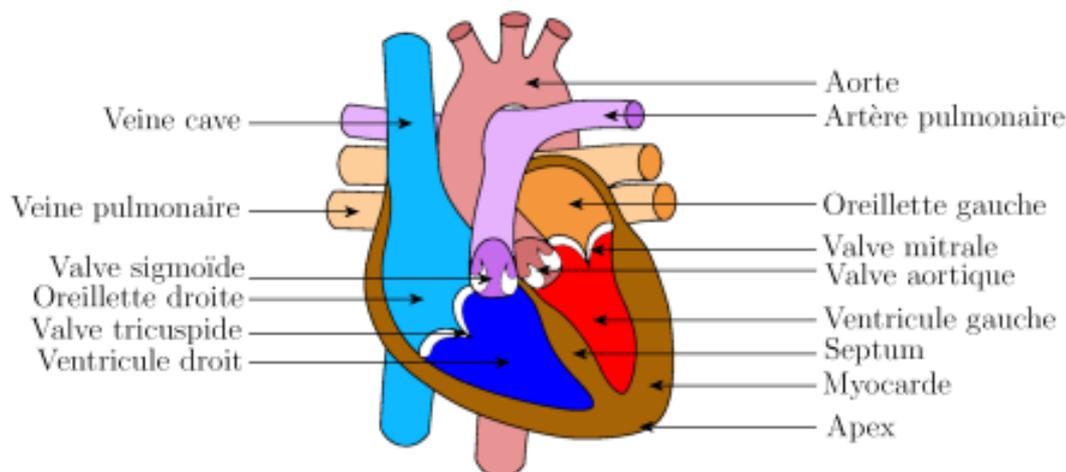


FIG. 6.1 – Anatomie du cœur

6.1.2 Acquisition en IRM

L'étude du muscle cardiaque est fondamentale puisque les pathologies cardio-vasculaires représentent une des principales causes de mortalité dans les pays occidentaux. Le ventricule gauche est la composante la plus critique du muscle cardiaque. Les critères déterminants pour la détection et le traitement des pathologies du cœur sont les paramètres dynamiques du mouvement cardiaque. Parmi ceux-ci, la fraction d'éjection du ventricule gauche (FEVG) dépend du volume de sang expulsé par le ventricule gauche lors de sa contraction. Elle est déterminée à partir des volumes ventriculaires télésystolique (en fin de systole) et télédiastolique (en fin de diastole).

L'Imagerie par Résonance Magnétique (IRM) est une technique non invasive qui utilise des ondes électromagnétiques pour produire des images des tissus internes. La technique s'est avérée précieuse pour le diagnostic d'une vaste gamme de pathologies dans toutes les parties du corps, y compris les accidents cardiovasculaires, le cancer, les problèmes dans les articulations et les problèmes musculosquelettiques. Dans le cas de l'étude du muscle cardiaque, l'IRM est capable de générer des volumes dynamiques, c'est-à-dire des séquences d'images 3D. On parle également de données 4D ou plus exactement 3D+T. Les équipements IRM actuels ne permettant pas d'acquérir des volumes 3D instantanément, les séquences 3D sont en fait construites par empilement de séquences 2D acquises à des instants différents. Il existe différents plans de coupes (différentes vues) pour réaliser ces acquisitions : la vue en quatre cavités (*4 chambers*, 4CH), en grand axe (*Long Axis*, LA) et en petit axe (*Short Axis*, SA). En acquisition petit axe, les plans de coupes sont perpendiculaires au grand axe du ventricule. La figure 6.2a montre ces plans de coupes dans une vue en 4 cavités. En 6.2b est représentée une coupe petit axe annotée, dans laquelle le ventricule gauche apparaît comme une section circulaire entourée par le myocarde. Peu de temps avant les acquisitions, un agent de contraste (le gadolinium) est injecté au patient

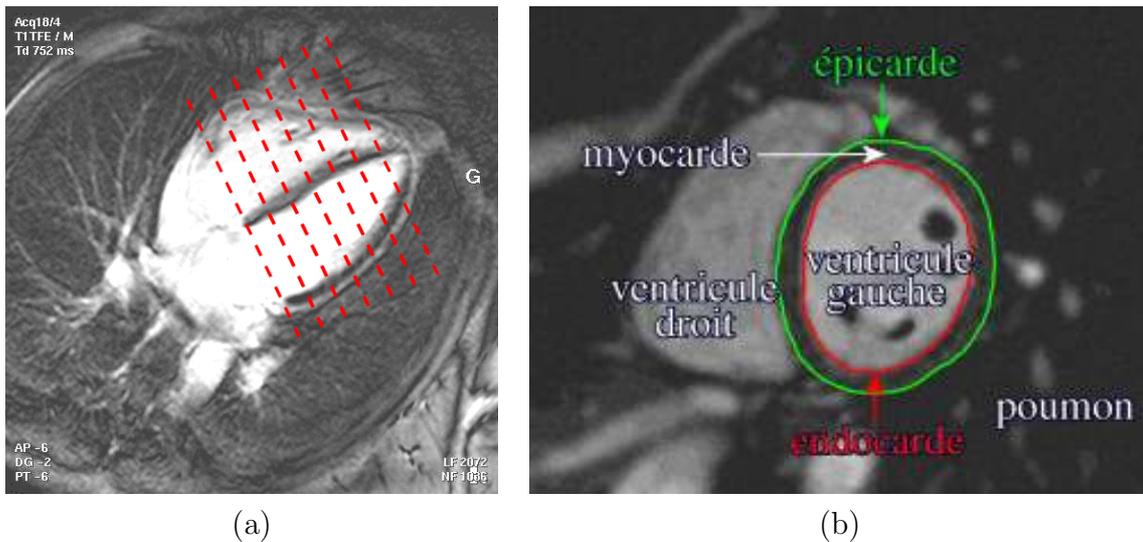


FIG. 6.2 – Coupes du cœur transversales au ventricule gauche. (a) Coupe transversales (b) Anatomie du cœur en petit axe

par voie intraveineuse. L'intensité correspondant au sang se trouve réhaussée, augmentant ainsi le contraste entre la cavité ventriculaire et le myocarde. L'endocarde, qui constitue la paroi interne du myocarde, est le centre de notre étude. Le but est ici de reconstituer la surface 3D de l'endocarde au cours de la séquence, afin de visualiser ses déformations et de pouvoir estimer des paramètres quantitatifs comme le volume et la fraction d'éjection.

Les séquences sont divisées en phases au cours du temps et en coupes dans l'espace. L'ensemble des phases couvre la totalité du cycle cardiaque, de sorte que les phases de systole et de diastole sont visibles. Les coupes couvrent l'ensemble du ventricule gauche de bas en haut (de l'apex jusqu'au début des valves). De par la nature de l'acquisition, la résolution en profondeur est beaucoup moins importante que la résolution spatiale des coupes. Les coupes sont en effet acquises en passes successives, sur des cycles cardiaques différents. A chaque passage, le patient est en apnée pour éviter les décalages dus aux mouvements de la cage thoracique. Par ailleurs, l'acquisition est synchronisée sur l'électrocardiogramme (ECG) pour que les phases soient les mêmes d'une coupe à l'autre. Une acquisition typique comporte 25 phases et 9 coupes, tandis que la résolution d'une coupe est de 256×256 pixels. Il s'agit donc de données 3D+T dont l'échantillonnage varie selon la dimension considérée et pour lesquelles nous développons un modèle dédié.

6.2 Travaux antérieurs

Les travaux traitant de l'analyse d'images cardiaques sont nombreux. Ils se distinguent tout d'abord par la modalité d'acquisition considérée. La plupart d'entre eux ont été réalisés sur des données issues d'IRM [GT95; JDFL01] et d'échographies [CWCH90; YNA02]. Dans une moindre mesure, ont été également étudiées les angiographies [MGTB06], les tomodensitométries (scanner) [BCA96b] et l'imagerie nucléaire, qui comprend la TEMP (Tomographie à Emission Mono-Photonique, en anglais *Single Photon Emission Computed Tomography* ou SPECT) [DBA⁺01] et la TEP (Tomographie par Emission de Positons, en anglais *Positron Emission Tomography* ou PET) [MCL⁺01]. Les références précédentes portent toutes sur l'étude du cœur humain.

Les premiers travaux concernant la segmentation du ventricule dans des images fixes sont assez anciens. L'endocarde est segmenté dans des images échographiques 2D par des méthodes de seuillage manuel [SMC⁺81], de seuillage automatique [ZG84] et de morphologie mathématique [KVFA88]. Dans [MBBP87], le suivi de l'endocarde dans des séquences échographiques est réalisé par une estimation du flot optique [HS81]. Les contours et surfaces déformables, de par leur capacité à modéliser la frontière du ventricule, se révèlent efficaces en imagerie cardiaque. Il existe cependant d'importants travaux qui n'utilisent pas ces méthodes. Medina *et al* [MGTB06] développent une approche région basée sur les champs de Markov pour segmenter des angiographies. Goshtasby et Turner [GT95] estiment la frontière du ventricule dans des IRM en ajustant une courbe lisse (une somme de gaussiennes) à un nuage de points, qui sont les maxima locaux du gradient. Ye *et al* [YNA02] utilisent un principe similaire sur des échographies, en ajustant une courbe B-spline à un nuages de points obtenus par filtrage avec les ondelettes de Gabor. Bien que les courbes B-splines soient une représentation possible des contours actifs [WT05], il ne s'agit pas ici d'un modèle déformable à proprement parler. Weng *et al* [WSC97] utilisent les profils d'intensité pour détecter des régions candidates. Après seuillage, un modèle probabiliste bayésien est développé pour éliminer les fausses régions candidates et ne conserver que le ventricule.

Les diverses représentations des modèles déformables décrites au chapitre 2 sont employées en imagerie cardiaque. Bardinet *et al* [BCA96b] utilisent les superquadriques pour analyser le mouvement du myocarde gauche dans des images TEMP et des tomodensitométries. Un seuillage et des opérations de morphologie mathématique sont appliqués préalablement pour obtenir les frontières internes et externes du ventricule. Malassiotis et Strintzis [MS99] suivent le ventricule gauche dans des séquences échographiques 2D avec un modèle de contour actif discret. La transformée de Hough permet de détecter la forme approximative du ventricule et fournit ainsi une initialisation au contour. Papademetris *et al* [PSD⁺02] reconstruisent un maillage en appliquant une triangulation de Delaunay sur un empilement de contours. Ces derniers sont créés par ajustement manuel de courbes B-splines. Paragios et Deriche [PD02b] utilisent les ensembles de niveaux basés région (les

régions actives géodésiques) pour segmenter l'endocarde et l'épicarde dans des images fixes acquises par IRM. L'une des particularités de ces travaux est que l'endocarde et l'épicarde correspondent chacun au niveau zéro d'une fonction d'ensembles de niveaux. Les deux fonctions sont couplées et évoluent simultanément. Cette idée est reprise par Lynch *et al* [LGW06] avec des ensembles de niveaux basés contour. Dydenko *et al* [DJB⁺06] suivent les déformations de la paroi inter-ventriculaire dans des séquences échographiques à l'aide d'ensembles de niveaux. Des connaissances *a priori* sur la forme et le mouvement de la paroi sont introduites dans la méthode d'évolution du contour.

De nombreux travaux sont basés sur le modèle de forme active (ASM) de Cootes et Taylor [CCTG95], qui permet de guider la segmentation du ventricule par un ensemble de formes de référence, qui est une collection de contours ou de surfaces du ventricule présegmentés. A partir d'une segmentation manuelle dans la première phase, Comaniciu *et al* [CZK04] réalisent un suivi dans des séquences échographiques grâce aux ASM, qui permettent alors de prévoir le mouvement du ventricule. Kaus *et al* [KVBW⁺04] et Van Assen *et al* [vADF⁺06] segmentent les frontières endocardiques et épicaudiques dans des IRM 3D fixes à l'aide de maillages triangulaires. Au cours de la segmentation, l'évolution du maillage est guidée par un processus de recalage par rapport à une base de maillages de référence. Les modèles d'apparence active [CET01], qui ajoutent aux ASM la notion de niveaux de gris de référence, sont utilisés par Mitchell *et al* [MLvdG⁺01] pour segmenter la totalité de la structure cardiaque dans des coupes IRM 2D. Un modèle de référence, qui contient les points de repère des ventricules gauche et droit ainsi que ceux de la paroi externe du myocarde, est recalé sur l'image.

Enfin, il est important de distinguer les différentes approches existantes pour gérer le problème du suivi. Nous allons voir que cette distinction constitue une des origines du développement de notre modèle dédié à la segmentation cardiaque. La première catégorie regroupe les approches dites "séquentielles", car le suivi est effectué par phases successives. La segmentation est réalisée à la phase t et la frontière finale obtenue à cet instant est utilisée comme estimation initiale à la phase $t + 1$. Jolly *et al* [JDFL01] et Shin *et al* [SKCP02] réalisent un suivi de l'endocarde et de l'épicarde à partir de séquences IRM 3D. Les frontières sont tout d'abord estimées dans la première coupe de la première phase à l'aide d'un contour actif discret. Elles sont ensuite propagées aux coupes et phases suivantes. Des techniques similaires basées sur les ensembles de niveaux sont utilisées dans [PMWH05] et [SMC⁺05]. Le deuxième type de suivi est également séquentiel, dans la mesure où les phases sont successivement traitées, mais il implique l'utilisation d'un modèle de mouvement. Mailloux *et al* [MBBP87] et plus récemment Dydenko *et al* [DJB⁺06] estiment un champ de déplacement à l'aide du flot optique. Des contraintes sur le mouvement du muscle cardiaque sont formulées, ce qui permet d'introduire une certaine cohérence temporelle dans le suivi. La troisième catégorie, moins répandue, considère le temps comme une dimension supplémentaire, au même titre que les dimensions spatiales. Ainsi, la segmentation et le suivi sont traités dans le même problème d'optimisation. Le suivi dans une séquence d'images 2D est effectué par déformation d'une surface 3D, ou plus rigou-

reusement, 2D+T. Paragios [Par03] utilise ce principe pour segmenter des séquences 2D IRM et échographiques. La représentation utilisée est une surface implicite munie entre autres d'une énergie de cohérence temporelle, dont la minimisation peut être considérée comme un lissage de la fonction d'ensembles de niveaux dans le temps. Montagnat et Delingette [MD05] développent une structure 4D (ou 3D+T) pour le suivi dans des séquences 3D obtenues par imagerie TEMP. La structure est basée sur les maillages simplex et la méthode d'évolution est une combinaison d'une approche physique et de l'algorithme du plus proche point itéré (*Iterative Closest Point*, ICP) [BM92]. Ce dernier permet d'estimer une transformation rigide d'une phase à l'autre, afin d'imposer une contrainte forte sur le mouvement.

6.2.1 Choix du modèle

Considérons les données et les modèles dont nous disposons. D'une part, nous avons en entrée des données tétradimensionnelles, qui consistent en des séquences d'images tridimensionnelles. Il existe dans ces séquences une cohérence temporelle et spatiale que nous devons exploiter. D'autre part, nous avons développé un modèle de surface active, basé sur un maillage triangulaire, capable de segmenter des structures d'intérêt dans des images fixes 3D. Par rapport aux différentes approches de suivi qui viennent d'être décrites, il semble que l'extension de notre modèle au domaine 4D soit l'alternative la plus pertinente pour réaliser la segmentation et le suivi du ventricule. En effet, les méthodes séquentielles, dans lesquelles la segmentation finale à l'instant t sert d'initialisation à l'instant $t + 1$, sont sujettes à la propagation et à l'accumulation d'erreurs. Si la frontière est erronée dans une phase donnée, elle le sera dans toutes les phases suivantes. Le modèle utilisé reste une surface 3D et la continuité temporelle est dans ce cas peu exploitée. Les méthodes basées sur une modélisation du mouvement peuvent également se satisfaire d'une surface 3D. Par le calcul du flot optique et le champ de déplacement qui en résulte, la cohérence temporelle est alors prise en compte. Cependant, étant donnée la nature des séquences cardiaques, l'estimation du mouvement par flot optique ne nous semble pas la plus appropriée. En effet, cette dernière nécessite de parcourir les phases dans un sens précis, le flot optique pouvant être appliqué au suivi temps réel. Or le mouvement du ventricule est cyclique. Il n'y a pas lieu de privilégier un sens de parcours et une phase de départ plutôt que d'autres. Aussi nous inspirons-nous de l'approche de Montagnat et Delingette [MD05] et Paragios [Par03], qui permet de traiter la segmentation et le suivi simultanément en minimisant l'énergie d'une hypersurface définie sur toute la séquence.

6.3 Surface active 3D+T pour la segmentation et le suivi

Dans la majorité des modèles déformables faisant intervenir le temps, ce dernier apparaît dans l'équation d'évolution. Il est ensuite discrétisé et devient plus ou moins l'indice de l'itération. Il s'agit d'un temps que l'on qualifiera d'algorithmique. Dans notre problème de suivi, nous considérons plutôt le temps comme un paramètre supplémentaire du modèle déformable, c'est-à-dire une dimension supplémentaire, au même titre que les dimensions spatiales. Une surface de l'espace est une application de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^3 . Par extension, une hypersurface de dimension 4 est une application de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^4 . Dans ce qui suit, nous présentons notre modèle de surface active 3D+T qui est un cas particulier d'hypersurface.

6.3.1 Modèle général

La surface 3D+T présentée ici n'est pas dédiée à la segmentation du ventricule. Il s'agit d'un modèle générique pour le suivi dans des séquences 3D. Nous introduisons le temps τ défini sur le domaine $\Omega_\tau = [0, 1]$. La donnée d'entrée est une séquence d'images I formalisée comme suit :

$$\begin{aligned} I &: \mathcal{D} \times \Omega_\tau \longrightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{x}, \tau) &\longmapsto I(\mathbf{x}, \tau) \end{aligned} \quad (6.1)$$

où $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$ est le domaine de définition spatial de la séquence d'images. L'expression $I(\mathbf{x}, \tau)$ est l'intensité au voxel \mathbf{x} à l'instant τ . Soit \mathcal{M} la surface 3D+T, également appelée surface temporelle. Son vecteur position \mathbf{m} est défini par :

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &: \Omega_u \times \Omega_v \times \Omega_\tau \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v, \tau) &\longmapsto \mathbf{m}(u, v, \tau) = (m_x(u, v, \tau), m_y(u, v, \tau), m_z(u, v, \tau))^T \end{aligned} \quad (6.2)$$

Contrairement à la définition d'une hypersurface, \mathcal{M} est à valeur dans \mathbb{R}^3 . Comme il s'agit d'un problème de suivi et qu'il y a une surface à tout instant, le point associé à (u, v, τ) se situe à l'instant τ , la quatrième coordonnée étant en permanence τ . Pour cette raison, nous ne la faisons pas apparaître dans l'expression de la surface. La séquence d'images et la surface temporelle sont cycliques et donc fermées dans le temps, ce qui peut être formalisé par les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} I(\mathbf{x}, 0) &= I(\mathbf{x}, 1) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D} \\ \mathbf{m}(u, v, 0) &= \mathbf{m}(u, v, 1) \quad \forall (u, v) \in \Omega_u \times \Omega_v \end{aligned} \quad (6.3)$$

La segmentation et le suivi sont effectués simultanément en déterminant la surface temporelle \mathcal{M} minimisant la fonctionnelle d'énergie suivante :

$$\begin{aligned} E(\mathcal{M}) &= \omega_{\text{espace}} E_{\text{espace}}(\mathcal{M}) + \omega_{\text{temps}} E_{\text{temps}}(\mathcal{M}) \\ &+ \omega_{\text{gradient}} E_{\text{gradient}}(\mathcal{M}) + \omega_{\text{région}} E_{\text{région}}(\mathcal{M}) \end{aligned} \quad (6.4)$$

Les énergies E_{espace} et E_{temps} sont les termes internes régularisants. On retrouve également les termes externes basés gradient et région. A chaque instant, la surface doit être régulière dans l'espace. Pour exprimer l'énergie de régularisation spatiale E_{espace} , nous reprenons le laplacien de la surface écrit à l'équation 3.57 :

$$E_{\text{espace}}(\mathcal{M}) = \int_{\Omega_\tau} \int_{\Omega_v} \int_{\Omega_u} \left\| \frac{\partial^2 \mathbf{m}}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{m}}{\partial v^2} \right\|^2 du dv d\tau \quad (6.5)$$

Inversement, en tout point, le mouvement de la surface doit être lisse tout au long de la séquence. Notre énergie de régularisation temporelle peut être considérée comme une courbure temporelle, car elle est basée sur la dérivée de second ordre par rapport à τ :

$$E_{\text{temps}}(\mathcal{M}) = \int_{\Omega_\tau} \int_{\Omega_v} \int_{\Omega_u} \left\| \frac{\partial^2 \mathbf{m}}{\partial \tau^2} \right\|^2 du dv d\tau \quad (6.6)$$

L'énergie de régularisation temporelle est l'amplitude du vecteur accélération. Rigoureusement, la surface \mathcal{M} qui minimise $E_{\text{temps}}(\mathcal{M})$ se déforme selon un mouvement uniforme ou ne se déforme pas du tout. En utilisant cette énergie, nous ne faisons aucune hypothèse sur le mouvement de l'objet suivi. La transformation peut être affine, rigide, semi-rigide... La pertinence de cette énergie dans le cadre du suivi du ventricule est discutée plus loin.

Les énergies externes sont aisément exprimées à partir de celles de la surface 3D. L'énergie de gradient fait en sorte que la surface soit localisée sur des zones de fort gradient en tout point et à chaque instant :

$$E_{\text{gradient}}(\mathcal{M}) = - \int_{\Omega_\tau} \int_{\Omega_v} \int_{\Omega_u} \|\nabla I(\mathbf{m}(u, v, \tau), \tau)\| du dv d\tau \quad (6.7)$$

Il est à noter que même dans notre problème de segmentation 3D+T, l'opérateur de gradient ∇ est une dérivation spatiale :

$$\nabla I = \left(\frac{\partial I}{\partial x}, \frac{\partial I}{\partial y}, \frac{\partial I}{\partial z} \right)^T$$

En effet, contrairement au problème du flot optique [HS81], nous ne cherchons pas ici à quantifier les variations d'intensité au cours du temps pour estimer les vecteurs de mouvement, car nous ne réalisons pas un suivi séquentiel. La fonction image n'est donc pas dérivée par rapport au temps.

L'approche région en bande étroite décrite au chapitre précédent est ici généralisée à un problème de segmentation 3D+T. Nous notons $\mathcal{B}_{in}(\tau)$ et $\mathcal{B}_{out}(\tau)$ les bandes intérieure et extérieure de part et d'autre de la surface à l'instant τ . Les domaines \mathcal{B}_{in} et \mathcal{B}_{out} sont désormais des portions de $\mathcal{D} \times \Omega_\tau$, qui regroupent les bandes spatiales de toute la séquence :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{in} &= \bigcup_{\tau \in \Omega_\tau} \mathcal{B}_{in}(\tau) \\ \mathcal{B}_{out} &= \bigcup_{\tau \in \Omega_\tau} \mathcal{B}_{out}(\tau) \end{aligned}$$

Pour une fonction f à valeur dans \mathbb{R} définie sur $\mathcal{D} \times \Omega_\tau$, on a :

$$\iiint_{\mathbf{r} \in \mathcal{B}_{in}} f(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \int_{\Omega_\tau} \iiint_{\mathbf{x} \in \mathcal{B}_{in}(\tau)} f(\mathbf{x}, \tau) d\mathbf{x} d\tau$$

où \mathbf{r} est un point dans la séquence temporelle (le terme *voxel* est souvent employé). Les intensités moyennes des bandes temporelles interne et externe s'écrivent :

$$\begin{aligned} \mu(\mathcal{B}_{in}) &= \frac{\int_{\Omega_\tau} \mu(\mathcal{B}_{in}(\tau)) d\tau}{\int_{\Omega_\tau} d\tau} = \frac{\int_{\Omega_\tau} \iiint_{\mathbf{x} \in \mathcal{B}_{in}(\tau)} I(\mathbf{x}, \tau) d\mathbf{x} d\tau}{\int_{\Omega_\tau} \mathcal{V}(\mathcal{B}_{in}(\tau)) d\tau} \\ \mu(\mathcal{B}_{out}) &= \frac{\int_{\Omega_\tau} \mu(\mathcal{B}_{out}(\tau)) d\tau}{\int_{\Omega_\tau} d\tau} = \frac{\int_{\Omega_\tau} \iiint_{\mathbf{x} \in \mathcal{B}_{out}(\tau)} I(\mathbf{x}, \tau) d\mathbf{x} d\tau}{\int_{\Omega_\tau} \mathcal{V}(\mathcal{B}_{out}(\tau)) d\tau} \end{aligned} \quad (6.8)$$

L'énergie de région en bande étroite est une extension temporelle de l'équation 5.53.

$$\begin{aligned} E_{\text{région}}(\mathcal{M}) &= \int_{\Omega_\tau} \iiint_{\mathcal{B}_{in}(\tau)} (I(\mathbf{x}, \tau) - \mu(\mathcal{B}_{in}))^2 d\mathbf{x} d\tau \\ &+ \int_{\Omega_\tau} \iiint_{\mathcal{B}_{out}(\tau)} (I(\mathbf{x}, \tau) - \mu(\mathcal{B}_{out}))^2 d\mathbf{x} d\tau \end{aligned} \quad (6.9)$$

Ainsi, nous cherchons à minimiser la variance totale de l'intensité des bandes au cours du temps. La cohérence temporelle, qui est assurée à l'origine par l'énergie E_{temps} , est une notion sous-jacente à l'énergie de région en bande étroite car la moyenne et la variance des intensités sont calculées sur toute la séquence. L'énergie repose sur l'invariance d'intensité de l'objet suivi et du fond, tout du moins au voisinage des frontières de l'objet. A l'inverse, si l'on est assuré que l'objet va subir des modifications importantes de son intensité moyenne au cours du temps, il est plus pertinent de reformuler l'énergie en remplaçant $\mu(\mathcal{B}_{in})$ par $\mu(\mathcal{B}_{in}(\tau))$ et $\mu(\mathcal{B}_{out})$ par $\mu(\mathcal{B}_{out}(\tau))$ dans l'équation précédente.

6.3.2 Modèle cylindrique pour les séquences cardiaques

Le modèle de surface temporelle présenté à la section précédente est très général et nécessite d'être spécialisé aux séquences cardiaques. La nature même de l'acquisition implique le type de surface à utiliser. En petit axe, les images de la séquence cardiaque sont construites par un empilement de coupes transversales du ventricule. Comme illustré en figure 6.3, le ventricule occupe toutes les coupes parallèles et chaque coupe est occupée

par une et une seule section du ventricule. Celui-ci apparaît alors comme une structure tubulaire dont l'axe est plus ou moins perpendiculaire aux plans de coupes.

Le modèle jusqu'à présent retenu pour la segmentation 3D était une surface sans bord, homéomorphe à une sphère. Cette topologie n'est plus adaptée ici. En effet, tel qu'il apparaît dans les séquences, le ventricule n'est pas fermé. Pour décrire la surface à ajuster au ventricule, nous adoptons une topologie cylindrique. L'équation paramétrique d'un cylindre de rayon r et d'axe z est :

$$\begin{cases} x(u, v) = r \cos(2\pi u) \\ y(u, v) = r \sin(2\pi u) \\ z(u, v) = h_z v \end{cases} \quad (6.10)$$

où h_z est à la fois la longueur du cylindre et la profondeur de l'image. Pour décrire le ventricule à un instant donné, nous généralisons cette définition de façon à ce que les sections du cylindre ne soient pas obligatoirement circulaires. L'équation paramétrique de notre cylindre généralisé est :

$$\begin{cases} x(u, v) = x_v(u) \\ y(u, v) = y_v(u) \\ z(u, v) = h_z v \end{cases} \quad (6.11)$$

où x_v et y_v sont les fonctions de position à la section de coupe v . Elles décrivent des courbes fermées :

$$x_v(0) = x_v(1) \quad \text{et} \quad y_v(0) = y_v(1) \quad \forall v \in \Omega_v$$

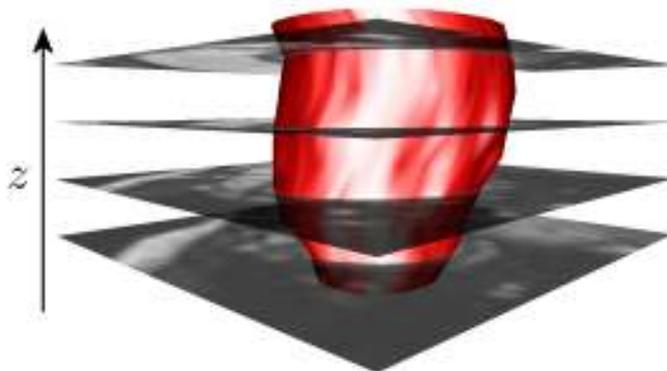


FIG. 6.3 – Surface déformable de topologie cylindrique et sections de coupes image

L'intersection de la surface 3D+T \mathcal{M} avec un instant τ (un plan temporel) est une surface \mathcal{S}_τ de vecteur position \mathbf{s}_τ , de sorte que $\mathbf{s}_\tau(u, v) = \mathbf{m}(u, v, \tau)$. Un point $\mathbf{s}_\tau(u, v)$ sur la surface \mathcal{S}_τ se déplace selon l'axe z lorsque le paramètre v varie et tourne autour du cylindre lorsque le paramètre u varie. L'intersection de \mathcal{S}_τ avec un plan $h_z v$ est une courbe 2D simple. Le contour $\mathcal{C}_{v,\tau}$, de vecteur position $\mathbf{c}_{v,\tau}$ est la paramétrisation de cette intersection. Ainsi, nous mettons en correspondance le point dans la surface temporelle, la surface et le contour par la relation suivante :

$$\mathbf{m}(u, v, \tau) = \mathbf{s}_\tau(u, v) = (\mathbf{c}_{v,\tau}(u), h_z v)^T$$

La séquence 3D n'est pas une suite d'images 3D mais un empilement de séquences 2D acquises successivement. Ce type d'acquisition génère des données particulièrement sous-échantillonnées selon l'axe z , les données étant corrélées dans le temps avant de l'être dans l'espace. Les dimensions typiques d'une image 3D à un instant donné sont $256 \times 256 \times 9$, la résolution en z étant beaucoup plus faible que dans les autres dimensions. Certaines méthodes de segmentation, comme celle de Goshtasby et Turner [GT95] que nous avons abordée plus haut, nécessitent d'avoir une image isotrope, c'est-à-dire de résolution égale dans toutes les dimensions. Dans [GT95], une méthode d'interpolation utilisant la technique du lancer de rayons est utilisée pour transformer les données IRM brutes en images isotropes.

Le modèle de suivi général décrit à la section précédente repose sur l'hypothèse de continuité et de dérivabilité de l'image dans toutes les directions. Pour que le modèle soit applicable sur les séquences cardiaques, ces dernières devraient être interpolées selon l'axe z pour être rendues isotropes. Or, les coupes créées de cette manière n'apportent pas d'information supplémentaire et nous privilégions une approche traitant les données anisotropes telles quelles. En considérant la discontinuité des données dans la direction z , les énergies du modèle cylindrique sont formulées sans dérivation ni interpolation de la fonction I par rapport à z .

6.3.3 Énergie du modèle cylindrique

La spécialisation du modèle de suivi général aux séquences IRM cardiaques repose sur deux principales considérations : la surface a désormais une topologie cylindrique et la fonction image est discontinue en z . Dans la fonctionnelle d'énergie suivante, nous distinguons les énergies relatives aux coupes $\mathcal{C}_{v,\tau}$ et les énergies relatives à la surface temporelle dans sa globalité :

$$E(\mathcal{M}) = \int_{\Omega_\tau} \int_{\Omega_v} E_{\text{contour}}(\mathcal{C}_{v,\tau}) dv d\tau + \omega_{\text{coupe}} E_{\text{coupe}}(\mathcal{M}) + \omega_{\text{temps}} E_{\text{temps}}(\mathcal{M}) \quad (6.12)$$

Dans le modèle général, l'énergie de régularisation spatiale E_{espace} fait intervenir le laplacien, combinant ainsi les dérivées partielles en u et v . L'utilisation du laplacien suppose l'isotropie de la discrétisation de la surface, ce qui n'est pas le cas de la surface cylindrique. Ici, nous séparons la régularisation spatiale entre les coupes, que nous formulons dans l'équation suivante, et la régularisation spatiale interne aux coupes. L'énergie E_{coupe} est la courbure rencontrée sur la surface lors du déplacement le long du cylindre :

$$E_{\text{coupe}}(\mathcal{M}) = \int_{\Omega_\tau} \int_{\Omega_v} \int_{\Omega_u} \left\| \frac{\partial^2 \mathbf{m}}{\partial v^2} \right\|^2 du dv d\tau \quad (6.13)$$

De manière rigoureuse, la dérivée partielle de \mathbf{m} selon v n'est pas définie lorsque $v = 0$ ou $v = 1$, c'est-à-dire lorsque \mathbf{m} est un bord de la surface. La discrétisation de l'énergie E_{coupe}

décrite plus loin prend en compte le cas particulier des bords.

L'énergie de régularisation temporelle E_{temps} est la même que précédemment (équation 6.6). Elle est nulle (et donc minimale) lorsque la surface subit une déformation nulle ou constante en direction et en amplitude. Or, le mouvement du ventricule n'est pas constant. Le cycle cardiaque est composé d'une phase de repos et d'une phase de contraction, celle-ci étant elle-même composée d'une rétractation et d'une dilatation. Le ventricule subit donc une accélération. Cependant, de même que l'énergie de courbure lisse un contour, notre énergie de régularisation temporelle, qui peut être vue comme une courbure selon τ , lisse le mouvement de la surface tout en autorisant les changements de vitesse et de direction. On remarquera que définir les poids ω_{coupe} et ω_{temps} à zéro supprime toute cohérence spatiale et temporelle, la surface 3D+T se comportant alors comme un ensemble de contours actifs évoluant indépendamment les uns des autres. L'énergie d'un contour \mathcal{C} s'écrit :

$$E_{\text{contour}}(\mathcal{C}) = \omega_{\text{courbure}}E_{\text{courbure}}(\mathcal{C}) + \omega_{\text{gradient}}E_{\text{gradient}}(\mathcal{C}) + \omega_{\text{région}}E_{\text{région}}(\mathcal{C}) \quad (6.14)$$

L'énergie E_{courbure} est le terme de régularisation interne à la coupe. Elle correspond à la courbure rencontrée sur la surface lorsque l'on se déplace autour du cylindre dans le plan perpendiculaire à l'axe z :

$$E_{\text{courbure}}(\mathcal{C}_{v,\tau}) = \int_{\Omega_u} \left\| \frac{\partial^2 \mathbf{c}_{v,\tau}}{\partial u^2} \right\|^2 du \quad (6.15)$$

Le terme de frontière E_{gradient} est fonction de l'amplitude du gradient aux points de contour :

$$E_{\text{gradient}}(\mathcal{C}_{v,\tau}) = - \int_{\Omega_u} \|\nabla I(\mathbf{c}_{v,\tau}(u), h_z v, \tau)\| du \quad (6.16)$$

où ∇ désigne le gradient calculé en dérivant I uniquement en x et y . La figure 6.4 met en évidence la discontinuité de l'image dans la direction z . En effet, le calcul de la norme du gradient avec la dérivée en z (figure 6.4b) génère des contours moins bien localisés que sans cette dérivée (figure 6.4a).

L'énergie de région est locale à chaque contour mais basée sur les intensités moyennes $\mu(\mathcal{B}_{in})$ et $\mu(\mathcal{B}_{out})$ calculées sur toute la séquence 3D :

$$E_{\text{région}}(\mathcal{C}_{v,\tau}) = \iint_{\mathcal{B}_{in}(v,\tau)} (I(x, y, h_z v, \tau) - \mu(\mathcal{B}_{in}))^2 dx dy + \iint_{\mathcal{B}_{out}(v,\tau)} (I(x, y, h_z v, \tau) - \mu(\mathcal{B}_{out}))^2 dx dy$$

où $\mu(\mathcal{B}_{in})$ et $\mu(\mathcal{B}_{out})$ sont définies à l'équation 6.8. Pour exprimer les intégrales de région sur les bandes en fonction d'intégrales de contour, nous utilisons l'approximation de l'équation 5.22 développée au chapitre précédent. Cette approximation fait intervenir le vecteur normal et la courbure au point $\mathbf{c}_{v,\tau}$ qui sont calculées localement sur le contour $\mathcal{C}_{v,\tau}$ sans tenir compte de la structure 3D.

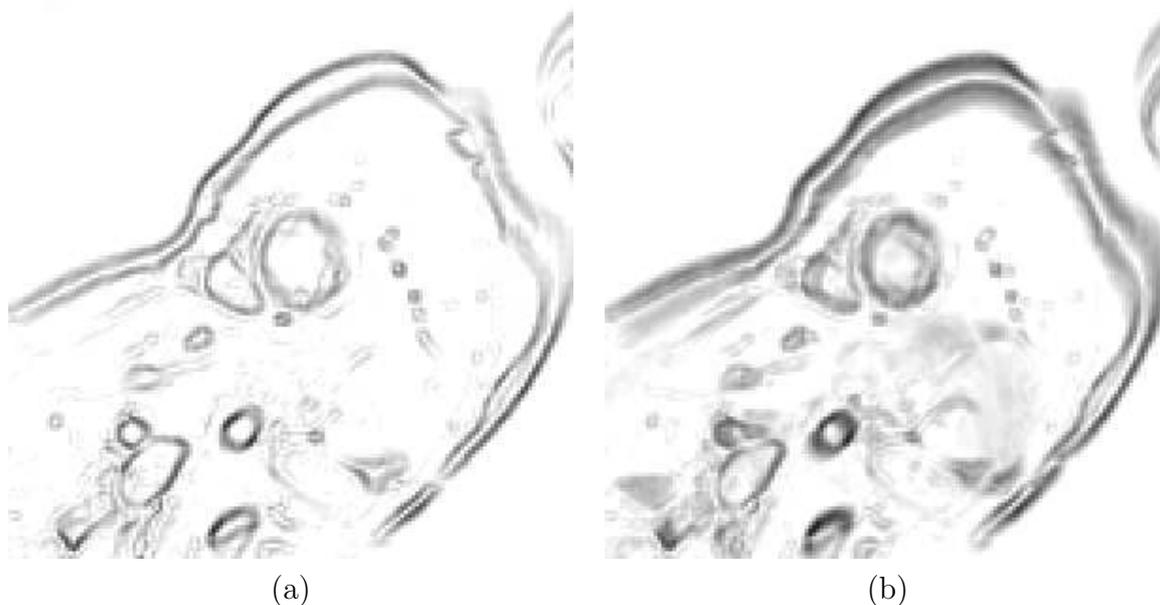


FIG. 6.4 – Calcul de l'amplitude du gradient avec : (a) Dérivées en x et y (b) Dérivées en x , y et z

Le ventricule gauche se prête à une segmentation selon un critère région en bande étroite. Comme le montre la figure 6.2b, le ventricule peut être isolé du fond en considérant l'intensité moyenne de part et d'autre de l'endocarde. Les nombreuses structures anatomiques présentes dans l'image rendent le fond non homogène. Le ventricule présente également des disparités au niveau des intensités de par la présence de muscles papillaires, ce qui justifie le principe de bande étroite. Le niveau de gris moyen est plus élevé dans la cavité ventriculaire que dans le myocarde. Le bord intérieur de la cavité ventriculaire, représenté par \mathcal{B}_{in} , est globalement plus clair que le bord extérieur, représenté par \mathcal{B}_{out} . Le but de la segmentation basée région est de faire coïncider la bande extérieure \mathcal{B}_{out} du contour avec le myocarde. Dans l'idéal, l'épaisseur de bande B et celle du myocarde sont identiques. Il est à noter que la différence de vitesse du flux sanguin et les artéfacts d'acquisition provoquent une variation de l'intensité de la cavité ventriculaire au cours du temps mais également dans une coupe. Cependant, la cavité reste globalement plus claire que le myocarde.

6.4 Implémentation et minimisation de l'énergie

6.4.1 Structure 3D+T

La séquence 3D+T est divisée spatialement en Z coupes et temporellement en T phases. On peut considérer la discrétisation de notre surface 3D+T comme une matrice de $Z \times T$

contours actifs munis de relations spatiales et temporelles, chaque coupe 2D étant occupée par un et un seul contour.

Chaque contour est discrétisé en un polygone $[\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n]$. Nous notons $\mathbf{p}_{i,z,t} = (p_{x_{i,z,t}}, p_{y_{i,z,t}})^T$ le $i^{\text{ième}}$ sommet du contour situé en coupe z et en phase t . On note $n_{z,t}$ le nombre de sommets de ce contour, quantité évoluant au cours des rééchantillonnages de la courbe durant son évolution. Comme illustré en figure 6.5, tout sommet situé en coupe z et en phase t est lié à des sommets en coupes $z-1$ et $z+1$ et en phases $t-1$ et $t+1$. Ces connexions permettent de gérer la cohérence temporelle et spatiale de la surface 3D+T. Nous notons $\mathcal{U}_{i,z,t}^+$ et $\mathcal{U}_{i,z,t}^-$ les ensembles de voisins du sommet $\mathbf{p}_{i,z,t}$ en coupes respectives $z+1$ et $z-1$. De la même façon, nous notons $\mathcal{F}_{i,z,t}^+$ et $\mathcal{F}_{i,z,t}^-$ les ensembles de voisins de $\mathbf{p}_{i,z,t}$ en phases respectives $t+1$ et $t-1$. Par la suite, nous utilisons les termes inter-coupe et inter-phase pour désigner les voisinages \mathcal{U} et \mathcal{F} .

Les voisinages spatiaux et temporels sont illustrés en figure 6.5, qui représente une surface discrète 3D+T comportant trois coupes et trois phases. Nous considérons le sommet central $\mathbf{p}_{i,z,t}$. Ses connexions inter-coupes sont représentées en traits épais et continus, tandis que ses connexions inter-phases sont représentées en pointillés. A une phase donnée, l'empilement des contours muni des connexions inter-coupes forme un maillage triangulaire. Dans cet exemple en particulier, le sommet $\mathbf{p}_{i,z,t}$ n'a qu'un voisin temporel dans chacune des phases voisines : $\text{card}(\mathcal{F}_{i,z,t}^-) = \text{card}(\mathcal{F}_{i,z,t}^+) = 1$. En ce qui concerne les connexions inter-coupes, le sommet est lié à trois voisins dans la coupe précédente et deux dans la coupe suivante : $\text{card}(\mathcal{U}_{i,z,t}^-) = 3$, $\text{card}(\mathcal{U}_{i,z,t}^+) = 2$.

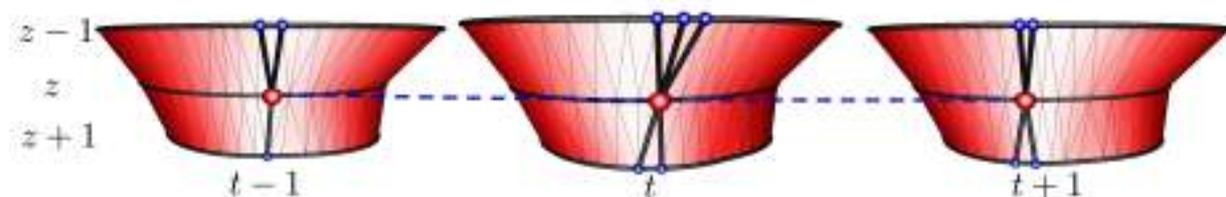


FIG. 6.5 – Connexions inter-coupes et inter-phases dans la surface 3D+T discrète

La topologie cylindrique de la surface implique que les première et dernière coupes soient des bords de la surface. Dans chaque phase, les sommets appartenant à ces coupes vérifient les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} \text{card}(\mathcal{U}_{i,1,t}^-) &= 0 \quad \forall(i,t), 1 \leq i \leq n_{1,t}, 1 \leq t \leq T \\ \text{card}(\mathcal{U}_{i,Z,t}^+) &= 0 \quad \forall(i,t), 1 \leq i \leq n_{1,t}, 1 \leq t \leq T \end{aligned}$$

A l'inverse, la surface est fermée et cyclique dans le temps. Les indices des phases doivent être considérés modulo T . Quelle que soit la coupe z , les voisins temporels du sommet $\mathbf{p}_{i,z,1}$ sont dans les phases 2 et T , tandis que ceux de $\mathbf{p}_{i,z,T}$ sont dans les phases 1 et $T-1$.

Les connexions inter-phases permettent l'implémentation de l'énergie de régularisation temporelle. Les connexions inter-coupes sont présentes non seulement pour implémenter l'énergie de régularisation spatiale mais aussi pour construire le maillage triangulaire, qui permet de visualiser la structure 3D du ventricule. Il est à noter que nous disposons d'un maillage mais à aucun moment nous ne calculons les caractéristiques différentielles de ce maillage, les vecteurs normaux et les courbures étant calculées indépendamment dans chaque contour.

Le maillage subit les mêmes opérations de remaillage que celle présentées à la section 3.2.6. Le critère de reparamétrisation est celui décrit pour le contour 2D, comme défini à l'équation 4.24. Dans la coupe z à la phase t , lorsque deux sommets $\mathbf{p}_{i,z,t}$ et $\mathbf{p}_{i+1,z,t}$ sont trop proches, ils sont fusionnés. Le sommet $\mathbf{p}_{i+1,z,t}$ est supprimé et ses anciens voisins, qu'ils soient intra-coupes, inter-coupes ou inter-phases, deviennent voisins de $\mathbf{p}_{i,z,t}$. Lorsqu'ils sont trop éloignés, un nouveau sommet est créé au milieu du segment $[\mathbf{p}_{i,z,t}\mathbf{p}_{i+1,z,t}]$. Deux voisins intra-coupes n'ont qu'un voisin en commun dans les coupes adjacentes :

$$\begin{aligned} \text{card}(\mathcal{U}_{i,z,t}^- \cap \mathcal{U}_{i+1,z,t}^-) &= 1 \quad \forall(i, z, t), 1 \leq i \leq n_{z,t}, 1 \leq z \leq Z, 1 \leq t \leq T \\ \text{card}(\mathcal{U}_{i,z,t}^+ \cap \mathcal{U}_{i+1,z,t}^+) &= 1 \quad \forall(i, z, t), 1 \leq i \leq n_{z,t}, 1 \leq z \leq Z, 1 \leq t \leq T \end{aligned}$$

Ainsi, ces voisins communs deviennent voisins inter-coupes du nouveau sommet créé. Il en va différemment pour le voisinage inter-phase, car le nouveau sommet créé est relié au plus proche voisin inter-phase de ses voisins intra-coupes.

6.4.2 Minimisation de l'énergie

Nous utilisons l'algorithme glouton à fenêtre normale. L'expression $\mathbf{p}_{i,z,t}$ désigne des coordonnées 2D, les sommets ne se déplaçant que dans leur propre coupe. Nous appliquons la déformation sur $Z \times T$ contours, de façon à minimiser l'énergie globale :

$$E(\mathcal{M}) = \sum_{t=1}^T \sum_{z=1}^Z \sum_{i=1}^{n_{z,t}} E(\mathbf{p}_{i,z,t}) \quad (6.17)$$

Les énergies décrites précédemment sont discrétisées et distribuées à chaque sommet. En omettant les indices z et t par souci de concision, l'énergie discrète d'un sommet \mathbf{p} s'écrit :

$$\begin{aligned} E(\mathbf{p}) &= \omega_{\text{courbure}} E_{\text{courbure}}(\mathbf{p}) + \omega_{\text{gradient}} E_{\text{gradient}}(\mathbf{p}) + \omega_{\text{région}} E_{\text{région}}(\mathbf{p}) \\ &+ \omega_{\text{coupe}} E_{\text{coupe}}(\mathbf{p}) + \omega_{\text{temps}} E_{\text{temps}}(\mathbf{p}) \end{aligned} \quad (6.18)$$

Les énergies E_{courbure} et E_{gradient} s'expriment comme celles présentées au chapitre 3 (équations 3.35 et 3.36). L'amplitude du gradient est calculée par filtrage de Sobel. L'énergie de région est identique à celle de l'équation 5.45, mis à part le calcul des intensités moyennes,

qui est effectué sur toute la séquence :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{V}(\mathcal{B}_{in}) &= \sum_{t=1}^T \sum_{z=1}^Z \sum_{i=1}^{n_{z,t}} \ell_{i,z,t} \left(B - \frac{B^2}{2} \kappa_{i,z,t} \right) \\
 \mathcal{V}(\mathcal{B}_{out}) &= \sum_{t=1}^T \sum_{z=1}^Z \sum_{i=1}^{n_{z,t}} \ell_{i,z,t} \left(B + \frac{B^2}{2} \kappa_{i,z,t} \right) \\
 \mu(\mathcal{B}_{in}) &= \frac{1}{\mathcal{V}(\mathcal{B}_{in})} \sum_{t=1}^T \sum_{z=1}^Z \sum_{i=1}^{n_{z,t}} \sum_{b=0}^{B-1} I(\mathbf{p}_{i,z,t} + b\mathbf{n}_{i,z,t}, z, t) \ell_{i,z,t} (1 - b\kappa_{i,z,t}) \\
 \mu(\mathcal{B}_{out}) &= \frac{1}{\mathcal{V}(\mathcal{B}_{out})} \sum_{t=1}^T \sum_{z=1}^Z \sum_{i=1}^{n_{z,t}} \sum_{b=1}^B I(\mathbf{p}_{i,z,t} - b\mathbf{n}_{i,z,t}, z, t) \ell_{i,z,t} (1 + b\kappa_{i,z,t})
 \end{aligned}$$

où $\ell_{i,z,t}$ et $\kappa_{i,z,t}$ sont respectivement l'élément de longueur et la courbure associés au sommet $\mathbf{p}_{i,z,t}$, dont les expressions discrètes sont données à l'équation 5.40.

L'implémentation des énergies de régularisation spatiale et temporelle nécessite des schémas de discrétisation des dérivées partielles de la surface par rapport à ses paramètres. En section 3.2.5, nous avons abordé la discrétisation des dérivées de surface sur un maillage isotrope, c'est-à-dire sans direction particulière. Notre maillage cylindrique est dirigé, car les dérivées selon u et v sont les variations respectivement intra-coupe et inter-coupe. Comme le voisinage inter-coupe n'est pas fixe (il le serait sur un maillage quadrangulaire), nous utilisons les barycentres des voisins inter-coupes, notés respectivement \mathbf{a}^- et \mathbf{a}^+ dans les coupes précédente et suivante :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a}_{i,z,t}^- &= \frac{1}{\text{card}(\mathcal{U}_{i,z,t}^-)} \sum_{j \in \mathcal{U}_{i,z,t}^-} \mathbf{p}_{j,z-1,t} \\
 \mathbf{a}_{i,z,t}^+ &= \frac{1}{\text{card}(\mathcal{U}_{i,z,t}^+)} \sum_{j \in \mathcal{U}_{i,z,t}^+} \mathbf{p}_{j,z+1,t}
 \end{aligned}$$

Nous approchons alors les dérivées de premier et second ordre par différences finies :

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial v} \right|_{\mathbf{m}=\mathbf{p}_{i,z,t}} &\approx \mathbf{p}_{i,z,t} - \mathbf{a}_{i,z,t}^- \\
 \left. \frac{\partial^2 \mathbf{m}}{\partial v^2} \right|_{\mathbf{m}=\mathbf{p}_{i,z,t}} &\approx \mathbf{a}_{i,z,t}^+ - 2\mathbf{p}_{i,z,t} + \mathbf{a}_{i,z,t}^-
 \end{aligned}$$

Dans une phase donnée, l'énergie inter-coupe maintient une surface dont les sections de coupe varient régulièrement. Elle s'apparente à une énergie de courbure dans la direction parallèle à l'axe du cylindre, dans la mesure où elle rapproche un sommet de ses voisins dans les coupes adjacentes :

$$E_{\text{coupe}}(\tilde{\mathbf{p}}_{i,z,t}) = \left\| \tilde{\mathbf{p}}_{i,z,t} - \frac{1}{2} (\mathbf{a}_{i,z,t}^- + \mathbf{a}_{i,z,t}^+) \right\|^2 \quad (6.19)$$

Les coordonnées des sommets étant exprimées en 2D, le barycentre des voisins inter-coupe de $\mathbf{p}_{i,z,t}$ est implicitement projeté sur le plan de coupe auquel appartient $\mathbf{p}_{i,z,t}$. Nous devons traiter les cas particuliers où $\mathbf{p}_{i,z,t}$ est un bord du cylindre. La figure 6.6 illustre l'effet de l'énergie E_{coupe} lorsque le sommet est sur une coupe quelconque (à gauche) et lorsque le sommet est un bord (à droite). Le voisinage inter-coupe d'ordre 2, que nous désignons par les ensembles $\mathcal{U}_{i,z,t}^{--}$ et $\mathcal{U}_{i,z,t}^{++}$ est l'ensemble des voisins inter-coupe des propres voisins inter-coupe de $\mathbf{p}_{i,z,t}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_{i,z,t}^{--} &= \bigcup_{j \in \mathcal{U}_{i,z,t}^-} \mathcal{U}_{j,z-1,t}^- \\ \mathcal{U}_{i,z,t}^{++} &= \bigcup_{j \in \mathcal{U}_{i,z,t}^+} \mathcal{U}_{j,z+1,t}^+\end{aligned}$$

Lorsque $z = 1$, le voisinage \mathcal{U}^- n'est pas défini. Dans ce cas, nous décalons les différences finies en avant, de sorte que la dérivée seconde est estimée par $x_i - 2x_{i+1} + x_{i+2}$ plutôt que par $x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1}$ (x est ici une fonction discrétisée quelconque). En utilisant le voisinage inter-coupe d'ordre 2, l'énergie E_{coupe} s'écrit :

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_{i,1,t}^+ &= \frac{1}{\text{card}(\mathcal{U}_{i,1,t}^+)} \sum_{j \in \mathcal{U}_{i,1,t}^+} \mathbf{p}_{j,2,t} \\ \mathbf{a}_{i,1,t}^{++} &= \frac{1}{\text{card}(\mathcal{U}_{i,z,t}^{++})} \sum_{j \in \mathcal{U}_{i,z,t}^{++}} \mathbf{p}_{j,3,t} \\ E_{\text{coupe}}(\tilde{\mathbf{p}}_{i,1,t}) &= \left\| \mathbf{a}_{i,1,t}^+ - \frac{1}{2} (\tilde{\mathbf{p}}_{i,1,t} + \mathbf{a}_{i,1,t}^{++}) \right\|^2\end{aligned}\tag{6.20}$$

Le principe est le même lorsque $z = Z$, à ceci près que l'on utilise les voisinages \mathcal{U}^- et \mathcal{U}^{--} . La dérivée seconde est alors décalée en arrière.

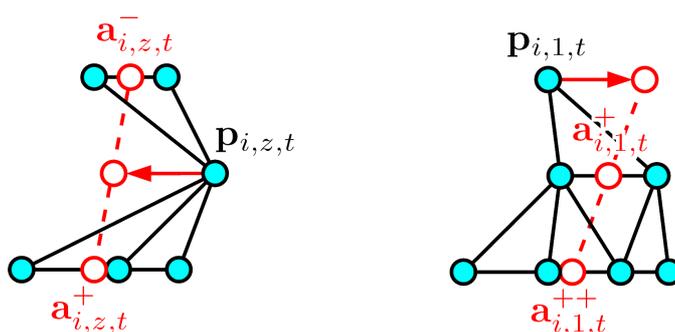


FIG. 6.6 – Minimisation de E_{coupe} lorsque le sommet $\mathbf{p}_{i,z,t}$ est sur une coupe quelconque (gauche) et lorsque le sommet est un bord (droite)

L'énergie inter-phase, qui assure la cohérence de la déformation au cours du temps, est définie de manière similaire. Son expression est obtenue en remplaçant les voisinages

inter-coupes \mathcal{U} par les voisinages inter-phases \mathcal{F} dans les équations précédentes :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{b}_{i,z,t}^- &= \frac{1}{\text{card}(\mathcal{F}_{i,z,t}^-)} \sum_{j \in \mathcal{F}_{i,z,t}^-} \mathbf{p}_{j,z,t-1} \\
 \mathbf{b}_{i,z,t}^+ &= \frac{1}{\text{card}(\mathcal{F}_{i,z,t}^+)} \sum_{j \in \mathcal{F}_{i,z,t}^+} \mathbf{p}_{j,z,t+1} \\
 E_{\text{temps}}(\tilde{\mathbf{p}}_{i,z,t}) &= \left\| \tilde{\mathbf{p}}_{i,z,t} - \frac{1}{2} (\mathbf{b}_{i,z,t}^- + \mathbf{b}_{i,z,t}^+) \right\|^2
 \end{aligned} \tag{6.21}$$

Contrairement à l'énergie de régularisation inter-coupe, il n'est pas nécessaire ici de prévoir des cas particuliers car la surface n'a pas de "bord" selon τ . Les indices $t-1$ et $t+1$ sont modulo T .

6.4.3 Calcul du volume

La fraction d'éjection FE est une des variables les plus importantes pour la caractérisation de la fonction ventriculaire gauche. Elle correspond à la proportion de volume de sang expulsé par le ventricule gauche lors de sa contraction et est donc représentative de l'état de santé du cœur. Elle est calculée à partir des volumes télésystolique $\mathcal{V}_{\text{systole}}$ et télédiastolique $\mathcal{V}_{\text{diastole}}$:

$$FE = \frac{\mathcal{V}_{\text{diastole}} - \mathcal{V}_{\text{systole}}}{\mathcal{V}_{\text{diastole}}}$$

La fraction d'éjection d'un cœur sain se situe en moyenne autour de 60%. Dans la séquence cardiaque, nous considérons que la phase de télédiastole est celle pour laquelle le volume du ventricule est maximal. A l'inverse, la télésystole correspond à la phase où le volume est minimal.

L'évaluation de la fraction d'éjection implique de calculer le volume occupé par la surface à des instants donnés. Ce calcul doit prendre en compte l'écart d'échantillonnage dans les différentes directions. Comme le montre la figure 6.7, les voxels ne sont pas cubiques, dans la mesure où ils occupent un espace plus important dans les plans XZ et YZ que dans le plan XY . Les paramètres d'acquisition d'une séquence IRM étant connus, le volume occupé par un voxel $\mathcal{V}_{\text{voxel}}$ est connu également. Une approche simple pour estimer le volume du ventricule consisterait à calculer l'aire de chaque coupe et à sommer les aires multipliées par $\mathcal{V}_{\text{voxel}}$, comme illustré sur la figure 6.8 (à gauche). Or, cette approche considère les coupes indépendamment les unes des autres et ne prend pas en compte la structure tridimensionnelle de la surface.

Notre méthode de calcul du volume tire profit de la structure du maillage, comme illustré en figure 6.8 (à droite). Elle est basée sur une décomposition en tétraèdres de l'espace délimité par le maillage. Tout polyèdre peut être décomposé en un ensemble de

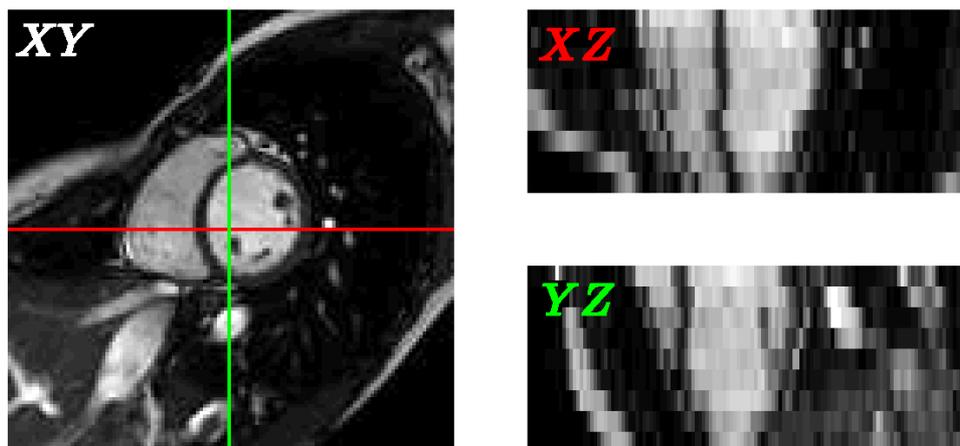


FIG. 6.7 – Plans XY (gauche), XZ et YZ (droite). Les volumes occupés par les voxels sont parallélépipédiques au lieu d’être cubiques

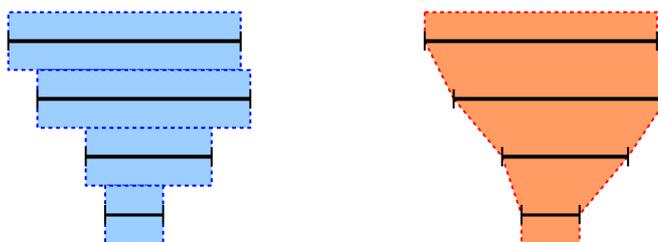


FIG. 6.8 – Estimation du volume du ventricule : approximation indépendante de la structure 3D (gauche) et avec prise en compte de la structure 3D (droite)

tétraèdres adjacents par triangulation de Delaunay contrainte ou *Constrained Delaunay Triangulation* (CDT) [Che89; She02]. Le terme triangulation est ici employé de manière générique pour un problème de dimension quelconque, mais il est plus rigoureux de parler de tétraédrisation dans le cas tridimensionnel. Quoiqu’il en soit, la structure particulière du maillage et une hypothèse sur la géométrie des coupes nous permettent d’utiliser une méthode de tétraédrisation plus simple que la CDT.

Tout d’abord, nous utilisons la propriété des polygones étoilés pour réaliser une triangulation des coupes. Un polygone P est dit étoilé (*star-shaped*) par rapport à un point \mathbf{p} si les segments reliant \mathbf{p} aux sommets de P n’intersectent aucune arête de P [PM85]. Le polygone représenté en figure 6.9 (à gauche) est étoilé par rapport à son barycentre. Nous partons du principe que la géométrie des coupes du ventricule gauche vérifie cette propriété. Nous pouvons ainsi trianguler les coupes horizontales en traçant les segments partant du barycentre jusqu’aux sommets.

Considérons deux coupes successives z et $z+1$. La surface de la portion de cylindre com-

prise entre ces deux coupes est discrétisée en un ensemble de triangles adjacents, qui sont composés soit de deux sommets de la coupe z et d'un de la coupe $z + 1$ soit d'un sommet de la coupe z et de deux de la coupe $z + 1$. Sur la figure 6.9b, le premier cas est représenté. Soient \mathbf{g}_z et \mathbf{g}_{z+1} les barycentres respectifs des deux coupes. Soit $[\mathbf{p}_{i,z}, \mathbf{p}_{i+1,z}, \mathbf{p}_{j,z+1}]$ le triangle considéré sur la surface cylindrique (nous omettons les indices t pour plus de clarté). Une fois les deux coupes triangulées par la méthode décrite au paragraphe précédent, il est possible de décomposer le volume inter-coupe en un ensemble de pentaèdres de la forme $[\mathbf{g}_z, \mathbf{g}_{z+1}, \mathbf{p}_{i,z}, \mathbf{p}_{i+1,z}, \mathbf{p}_{j,z+1}]$. Ce pentaèdre peut être décomposé en deux tétraèdres $[\mathbf{g}_z, \mathbf{g}_{z+1}, \mathbf{p}_{i,z}, \mathbf{p}_{j,z+1}]$ (figure 6.9c en haut) et $[\mathbf{g}_z, \mathbf{g}_{z+1}, \mathbf{p}_{i+1,z}, \mathbf{p}_{j,z+1}]$ (figure 6.9c en bas). Le volume du tétraèdre formé de quatre sommets $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ et \mathbf{p}_4 se calcule comme suit :

$$\mathcal{V}_{\text{tétraèdre}}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4) = \frac{|(\mathbf{p}_4 - \mathbf{p}_1) \cdot ((\mathbf{p}_4 - \mathbf{p}_2) \wedge (\mathbf{p}_4 - \mathbf{p}_3))|}{6}$$

Ainsi, nous estimons le volume total du ventricule en parcourant les triangles du maillage cylindrique. Chaque triangle donne lieu au calcul du volume de deux tétraèdres.

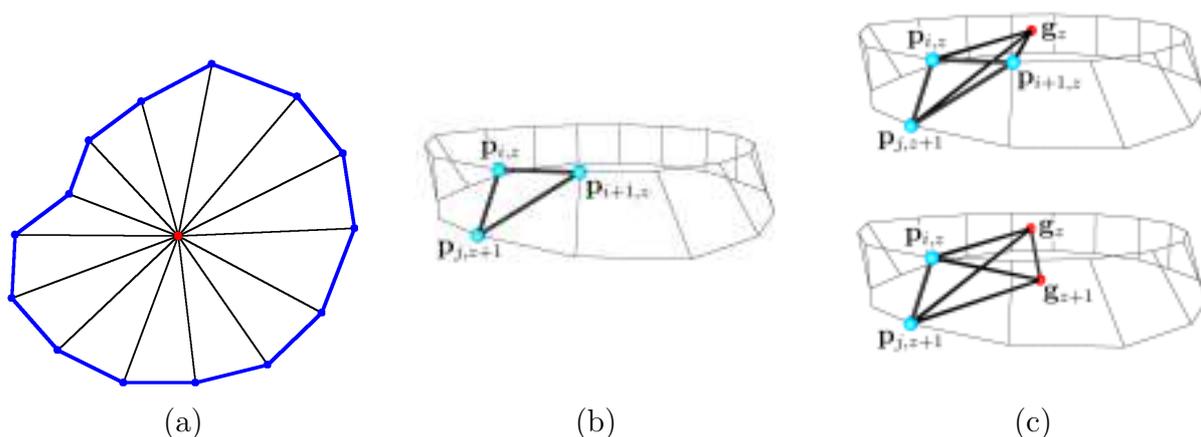


FIG. 6.9 – Calcul du volume du maillage : (a) Triangulation d'une coupe grâce au barycentre (b) Triangle en cours de calcul (c) Deux tétraèdres correspondant au triangle

6.5 Expérimentations

6.5.1 Initialisation

Le mouvement du ventricule gauche est essentiellement une contraction. Ce mouvement est éventuellement accompagné d'un soulèvement de l'apex mais dont l'effet est négligeable sur une acquisition en petit axe, puisque le ventricule se soulève le long de l'axe perpendiculaire aux coupes. Par ailleurs, l'axe principal du ventricule coïncide avec l'axe z des images. Ces types particuliers de mouvement et d'acquisition nous permettent d'initialiser

le modèle en fournissant un point unique. En effet, le centre du ventricule occupe approximativement la même position dans toutes les coupes et toutes les phases, ce qui permet d'initialiser la surface 3D+T en un cylindre dans chaque phase, de façon à ce qu'elle soit entièrement incluse dans la cavité ventriculaire.

L'utilisateur fournit le centre $(c_x, c_y)^T$ ainsi que le rayon r du cylindre. Les sommets d'une coupe donnée sont initialisés à intervalles réguliers sur un cercle de rayon r et de centre $(c_x, c_y)^T$:

$$\mathbf{p}_{i,z,t}^{(0)} = \left(c_x + r \cos \left(\frac{2\pi(i-1)}{n_{z,t}} \right), c_y + r \sin \left(\frac{2\pi(i-1)}{n_{z,t}} \right) \right)^T$$

ce qui est vérifié $\forall(i, z, t)$, $1 \leq i \leq n_{z,t}$, $1 \leq z \leq Z$, $1 \leq t \leq T$. Le nombre de sommets $n_{z,t}$, dépendant de r et de l'échantillonnage w souhaité, est le même quelles que soient la coupe et la phase considérées. Les voisinages inter-coupes sont initialisés de sorte que chaque sommet est lié au sommet de même indice et à son successeur dans la coupe suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{i,z,t}^{+(0)} &= \{i, i+1\} \\ \mathcal{U}_{i,z,t}^{- (0)} &= \{i-1, i\} \end{aligned}$$

La structure de maillage triangulaire est ainsi vérifiée. Quant aux voisinages inter-phases, ils traduisent une correspondance de sommet à sommet :

$$\mathcal{F}_{i,z,t}^{+(0)} = \mathcal{F}_{i,z,t}^{- (0)} = \{i\}$$

Comme la plupart des méthodes basées sur les modèles déformables explicites, notre approche reste semi-automatique, car l'initialisation est toujours fournie manuellement. Dans des travaux futurs, il serait intéressant de nous concentrer sur le problème de l'initialisation automatique dédiée au suivi cardiaque. La position initiale pourrait être estimée en récoltant des indices visuels tels que l'intensité moyenne d'une zone ou la quantité de mouvement.

6.5.2 Evaluation

Les tests sont réalisés sur une base de 20 séquences cardiaques, chacune provenant d'un patient différent ¹. La base comporte des séquences issues de cœurs sains et pathologiques. Celles-ci sont acquises en petit axe avec un appareil IRM Philips INTERA 1,5 Tesla. Les séquences sont divisées temporellement en 25 ou 35 phases, tandis que le nombre de coupes varie de 9 à 15. La résolution des plans de coupes est 256×256 pixels, pour une résolution en x et y de 2 mm/pixel. L'épaisseur des coupes, qui est également la

¹Les séquences proviennent du CHU Trousseau de Tours. Nous remercions particulièrement Ludovic LAUNEAU, manipulateur au sein du service de radiologie dirigé par le professeur Daniel ALISON, pour avoir fourni la majorité des séquences

résolution en z , varie en fonction de leur nombre, de 4 à 9 mm/pixel. Parmi les 20 séquences, nous disposons d'une segmentation de référence et des valeurs de fraction d'éjection sur 7 séquences. Cette vérité terrain est construite par les experts à l'aide du logiciel Philips Easyvision fourni avec l'équipement IRM. Les segmentations expertes sont construites coupe par coupe par un ajustement manuel de courbes B-spline. La vérité terrain étant élaborée indépendamment sur chaque coupe, les écarts entre les frontières estimées et les frontières réelles sont également calculés de cette manière.

Les tests mettent en œuvre les différentes énergies du modèle déformable. Les valeurs des poids, déterminées expérimentalement sur la base de séquences, sont les suivantes :

$$\begin{array}{lll} \omega_{\text{courbure}} & = & 2 \\ \omega_{\text{coupe}} & = & 0.1 \end{array} \quad \begin{array}{lll} \omega_{\text{gradient}} & = & 0 \\ \omega_{\text{temps}} & = & 0.3 \end{array} \quad \begin{array}{lll} \omega_{\text{région}} & = & 1 \end{array}$$

L'influence des poids est discutée plus loin. Les résultats qui figurent dans le tableau 6.1 ont été obtenus avec ces réglages. Notons que l'énergie de gradient ne se révèle pas nécessaire. En tant qu'énergie externe, le terme de région se suffit à lui-même pour segmenter le ventricule. Comme dans les expérimentations présentées au chapitre 5, nous utilisons le lissage gaussien des contours avec un écart-type égal à ω_{courbure} , ce qui permet d'imposer une forte contrainte de régularité aux contours. La validité de ce lissage dans des cas particuliers est discutée plus loin.

La figure 6.10 illustre la segmentation obtenue sur un cœur sain à différents instants. Les trois premières lignes correspondent aux coupes $z = 1$, $z = 5$ et $z = 9$, tandis que la dernière ligne représente la reconstruction 3D du maillage. Le volume minimal est observé à $t = 10$, qui correspond donc à la phase télésystolique. L'ajustement de la surface sur les parois de l'endocarde est satisfaisant. La surface parvient à englober les piliers dans sa région intérieure et à se maintenir sur l'endocarde en phase télésystolique, lorsque les régions des ventricules gauche et droit se confondent. Ceci est une caractéristique importante de la régularisation spatiale et temporelle de notre modèle, que nous étudions plus loin. Le temps de segmentation d'une séquence complète est d'environ 10 secondes, à comparer avec les 3 minutes en moyenne nécessaires à un praticien entraîné pour segmenter les coupes uniquement en phase télésystolique et télédiastolique sous le logiciel Easyvision. Notre approche représente un gain de temps substantiel par rapport à une segmentation manuelle.

Le tableau 6.1 liste les erreurs moyennes et maximales (en pixels) entre les frontières de référence et les frontières estimées sur les séquences disposant d'une vérité terrain. Les valeurs de distance moyenne H_{mean} , qui sont sensiblement plus élevées pour les séquences 5 et 6, traduisent tout de même des segmentations fidèles aux segmentations de référence. Les distances H reflètent également des erreurs maximales très encourageantes. La figure 6.11 représente une séquence d'un cœur pathologique auquel s'apparente celui des patients 5 et 6. Ce type de pathologie, décrit en détail par la suite, pose en particulier des difficultés de segmentation, à la fois pour notre méthode et pour les experts, ce qui explique les erreurs

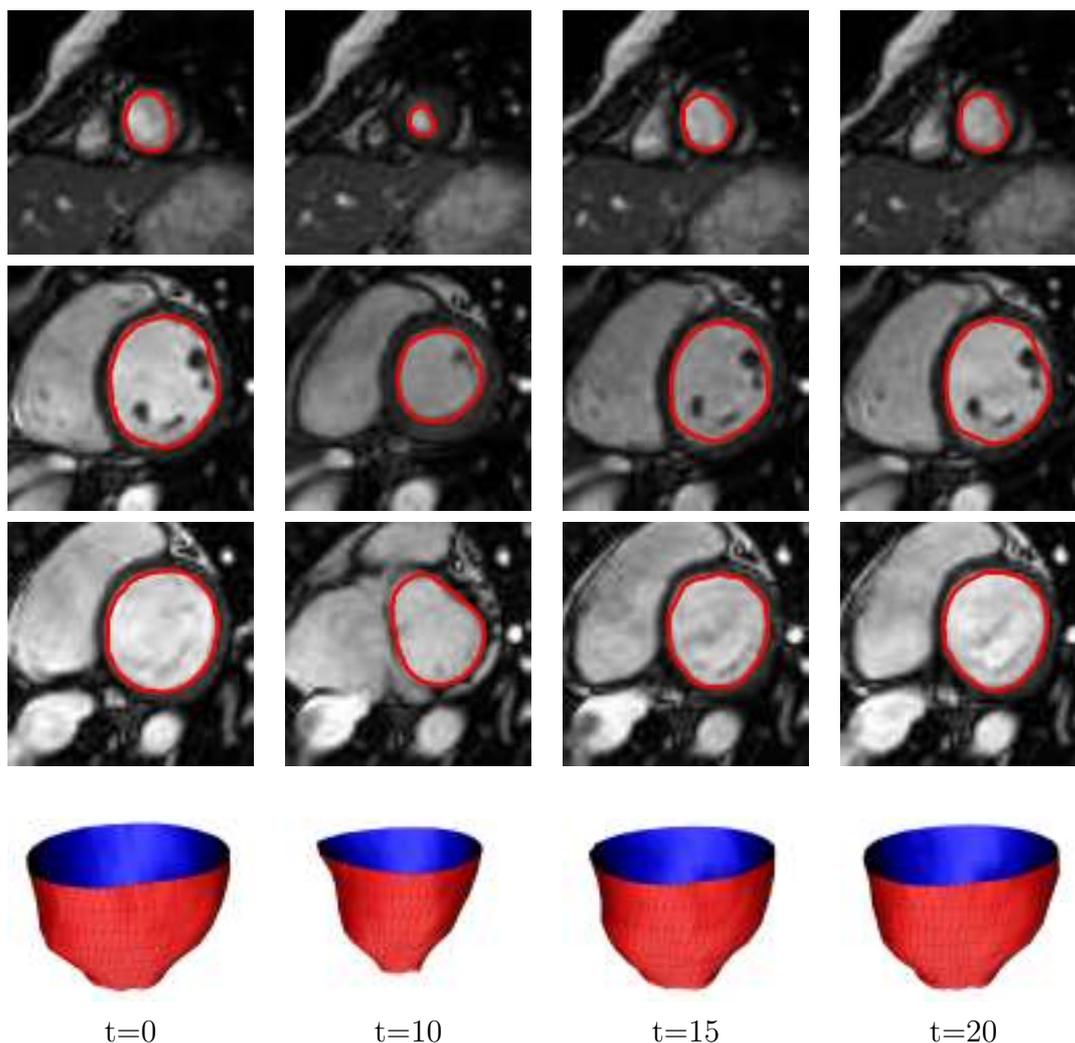


FIG. 6.10 – Segmentation d’un cœur sain. Coupes $z = 1$, $z = 5$ et $z = 9$ et maillage triangulaire cylindrique

maximales plus élevées que dans les autres séquences.

Le tableau 6.1 liste également les pourcentages des fractions d’éjection estimées et leurs références. Les erreurs absolues et relatives sont calculées comme suit :

$$\text{Ecart absolu } FE = |FE \text{ de référence} - FE \text{ estimée}|$$

$$\text{Ecart relatif } FE = \frac{|FE \text{ de référence} - FE \text{ estimée}|}{FE \text{ de référence}}$$

Nous observons une corrélation forte entre l’erreur sur le pourcentage de fraction d’éjection, qu’elle soit absolue ou relative, et la distance de Hausdorff moyenne. D’un point de vue théorique, ces deux valeurs ne sont pas directement liées. Une fraction d’éjection proche de la référence n’implique pas nécessairement une bonne segmentation. Par exemple, en translatant tous les sommets de la surface, nous augmentons l’erreur moyenne de manière

Séquence	H_{mean}	H	%FE (référence)	%FE (estimée)	%FE (écart absolu)	%FE (écart relatif)
1	0.870	2.379	43.0	47.9	4.9	11.0
2	0.815	1.228	51.1	55.2	4.1	8.0
3	0.156	0.931	58.8	58.2	0.6	1.0
4	0.904	2.004	77.1	82.2	4.1	7.0
5	1.647	4.373	57.4	67.1	9.7	17.0
6	1.386	3.044	41.7	49.0	7.3	18.0
7	1.038	2.542	49.0	54.6	5.6	11.0

TAB. 6.1 – Distances de Hausdorff entre la segmentation de référence et la segmentation estimée + écarts absolus et relatifs entre les fractions d’éjection de référence et les fractions d’éjection estimées

significative sans modifier la fraction d’éjection. Par ailleurs, seules les segmentations en phases télésystolique et télédiastolique sont prises en compte pour le calcul. Par contre, une fraction d’éjection erronée traduit obligatoirement une erreur de segmentation.

Etudions l’influence de l’erreur de segmentation sur l’écart de fraction d’éjection. Après segmentation d’une séquence complète, nous obtenons les volumes $\mathcal{V}_{\text{diastole}} = 124.61 \text{ cm}^3$ et $\mathcal{V}_{\text{systole}} = 63.21 \text{ cm}^3$, qui mènent à une fraction d’éjection de 49.27%. En phase télédiastolique, nous dilatons la surface d’un pixel selon la direction normale, de façon à obtenir une erreur moyenne approximative $H_{\text{mean}} = 1$ (sur cette phase uniquement). Le volume $\mathcal{V}_{\text{diastole}}$ passe à 143.02 cm^3 et la fraction d’éjection à 55.80%. En dilatant la surface de la même manière en phase télésystolique, le volume $\mathcal{V}_{\text{systole}}$ passe à 76.78 cm^3 et la fraction d’éjection à 38.38%. Dans les deux cas, l’erreur moyenne sur toute la séquence est faible. Ainsi, dans des cas très particuliers, une erreur de segmentation très acceptable peut avoir des conséquences importantes sur l’estimation de la fraction d’éjection. Si nous dilatons la surface dans toutes les phases, la fraction d’éjection est de 46.32%. L’erreur absolue est d’environ 3%, ce qui est inférieur à la plupart des valeurs du tableau 6.1. Par conséquent, la fraction d’éjection seule ne peut être représentative de la qualité de segmentation.

D’autre part, la variabilité des mesures de fraction d’éjection est de l’ordre de 15% (absolu) d’un examen à l’autre. Pour pouvoir affirmer que les valeurs trouvées sont les plus proches de la réalité, il serait nécessaire de comparer les valeurs obtenues avec les différents examens (IRM, scanner, scintigraphie, angiographie et échographie). Cela soulève des difficultés d’ordre pratique, ne serait-ce que pour pratiquer tous les examens dans un court laps de temps sur un grand nombre de patients.

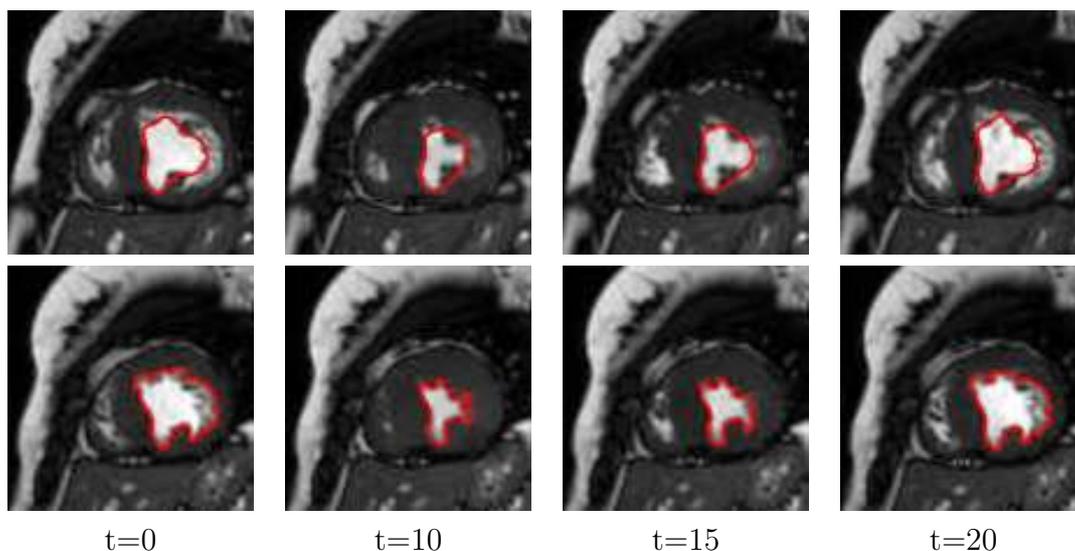


FIG. 6.11 – Segmentation d'un cœur pathologique : coupe $z = 4$ avec $\omega_{\text{courbure}} = 2$ (ligne supérieure) et coupe $z = 5$ avec $\omega_{\text{courbure}} = 0.5$ (ligne inférieure)

6.5.3 Influence de la régularisation

Courbure et lissage

La qualité de segmentation est meilleure sur les séquences de cœurs sains (cf figure 6.10). En effet, la géométrie des coupes d'un ventricule sain est très régulière. Elle est en adéquation avec la fonctionnelle d'énergie de notre modèle et se prête donc bien à la segmentation par surface active malgré les difficultés liées au type d'images. Outre ces difficultés, certaines pathologies amènent des obstacles supplémentaires à la segmentation. C'est le cas de l'hypertrophie myocardique, qui se traduit par un épaississement des tissus musculaires, dont le myocarde lui-même ainsi que les piliers intra-ventriculaires. Les effets néfastes à la segmentation sont notamment la réduction de la cavité ventriculaire et la proximité entre les piliers et le myocarde. Les parois de l'endocarde présentent alors des irrégularités et des zones concaves. Cela réduit non seulement la capacité à estimer la frontière par modèle déformable mais également à segmenter manuellement.

Les contours obtenus lors de la segmentation d'un cœur atteint d'hypertrophie myocardique sont représentés en figure 6.11. Les contours représentés sur la ligne inférieure sont obtenus avec $\omega_{\text{courbure}} = 2$ tandis que ceux de la ligne inférieure sont obtenus avec $\omega_{\text{courbure}} = 0.5$. Ce poids influe sur l'importance de l'énergie de courbure et du lissage gaussien. La réduction du poids ω_{courbure} permet à la surface d'explorer les zones étroites et concaves, au détriment de la régularité. Le problème reste entier, car adapter automatiquement l'influence de la régularisation en fonction du type de cœur est difficile en l'état actuel. Cela ne peut se faire qu'au prix d'une intervention de l'utilisateur. Par ailleurs, di-

minuer l'influence des énergies régularisantes n'est pas sans risque, car elles participent au maintien de la surface dans la région d'intérêt. Par la suite, nous envisageons de développer des termes d'énergie assurant une forme globale tout en autorisant des irrégularités.

Régularisation spatiale et temporelle

La surface 3D+T munie des énergies inter-coupe et inter-phase permet de prendre en compte la corrélation spatiale et temporelle des coupes du ventricule dans l'ensemble de la séquence. La géométrie du ventricule varie peu d'une phase à l'autre et dans une moindre mesure d'une coupe à l'autre. L'adjonction des termes de régularisation spatiale et temporelle se révèle primordiale pour le suivi du ventricule. Nous mettons en évidence ce principe en comparant les résultats obtenus avec le réglage $\omega_{\text{coupe}} = 0.1$ et $\omega_{\text{temps}} = 0.3$ d'un côté et $\omega_{\text{coupe}} = \omega_{\text{temps}} = 0$ de l'autre. Les figures 6.12 et 6.13 représentent le contour obtenu à la dernière coupe, qui correspond à la partie supérieure du ventricule. En phase de systole ($t = 9$), la contraction et les effets de volume partiel donnent l'illusion que les frontières des ventricules gauche et droit sont confondues. Ces deux structures ayant globalement la même intensité, l'énergie de région pousse le contour à englober le ventricule droit. Sans cohérence temporelle et spatiale (figure 6.12), le contour se propage dans le ventricule droit. En ajoutant les énergies inter-coupe et inter-phase, le phénomène de régularisation s'oppose au critère de région et maintient le contour semblable d'une phase à l'autre (figure 6.13).

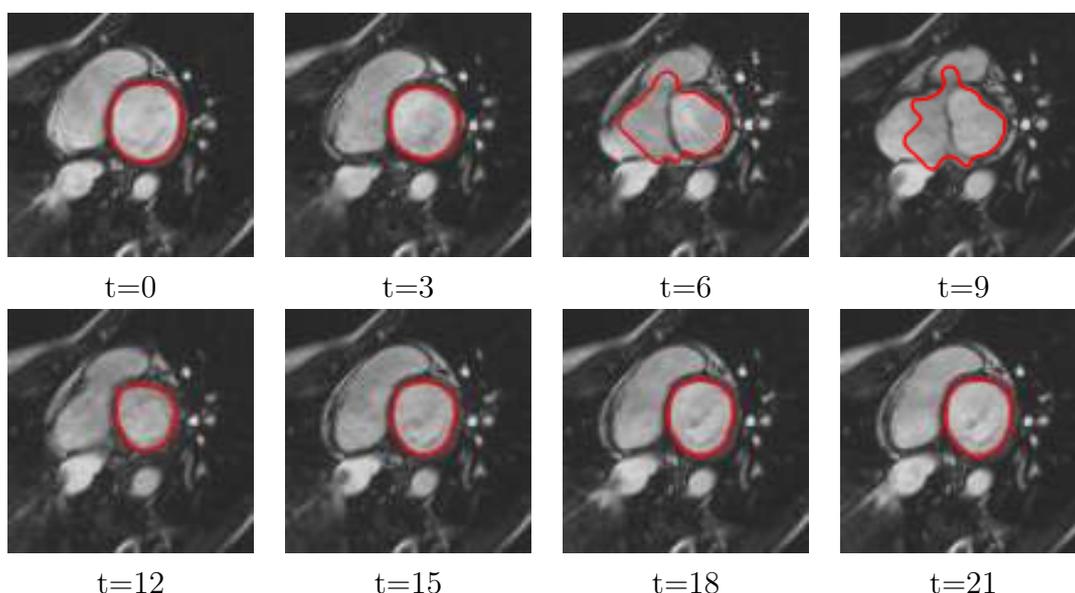


FIG. 6.12 – Fuite de contour en l'absence de régularisation spatiale et temporelle

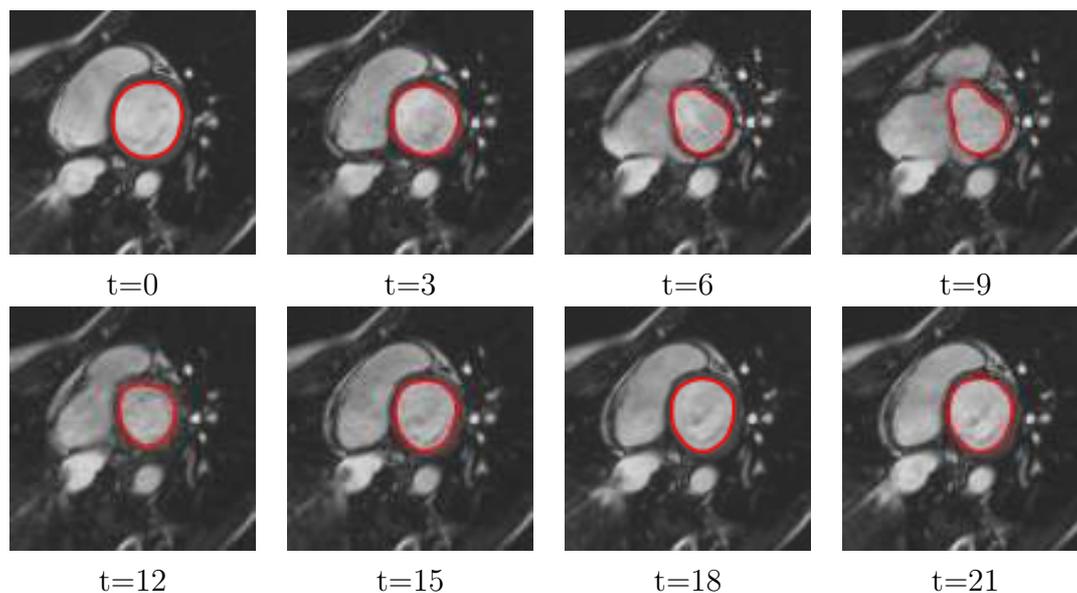


FIG. 6.13 – Régularisation spatiale et temporelle

6.6 Discussion

La méthode basée sur le modèle de surface active 3D+T décrite dans ce chapitre s'est révélée à même de suivre la déformation de la paroi du ventricule gauche. Sa capacité à exploiter l'information spatiale et temporelle a été mise en relief. Par ailleurs, la segmentation des séquences cardiaques est un élément supplémentaire pour justifier l'efficacité de l'énergie de région en bande étroite.

Un certain nombre de perspectives sont à considérer. En premier lieu, l'évaluation de la méthode demande à être étoffée. Sur l'ensemble des séquences cardiaques dont nous disposons, plus de la moitié ne comporte pas de segmentation de référence. Il est toujours possible de juger de la qualité d'une segmentation à l'oeil nu, mais avec toute la subjectivité que cela comporte. L'élaboration de la vérité terrain n'est pas sans poser problème, particulièrement dans des données 3D+T, où une segmentation manuelle précise de chaque coupe est extrêmement fastidieuse. Une solution envisagée serait de développer des méthodes de génération de séquences cardiaques aléatoires où les paramètres "sensibles" seraient ajustables : contraste entre la cavité et le myocarde, quantité de piliers dans la cavité, amplitude de la déformation, régularité de la paroi... Nous devons alors nous interroger sur la pertinence de ces paramètres par rapport à des conditions réelles.

Il serait également intéressant de développer une approche pour éviter d'effectuer un compromis entre régularité et capacité d'exploration, comme nous l'avons abordé à la section précédente. En effet, sur certaines séquences, il est possible d'améliorer l'ajustement aux données en modifiant le poids de l'énergie de courbure. Ce type de modification a été

jusqu'à présent manuel, ce qui pourrait être évité à l'avenir en reformulant les énergies internes. Enfin, nous souhaitons automatiser entièrement la segmentation en déterminant la position initiale de la surface active sans intervention préalable de l'utilisateur. La quantité de variation des intensités au cours de la séquence ainsi que les coefficients de la transformée de Hough circulaire sont des exemples d'indices exploitables pour déterminer automatiquement le centre du ventricule.

Chapitre 7

Conclusion

7.1 Contributions

Dans cette thèse, nous avons contribué à l’extension des modèles déformables sur les trois aspects fondamentaux que sont la représentation, l’évolution et l’attache aux données.

Après avoir situé le contexte des modèles déformables par un état de l’art détaillé, nous avons développé des modèles déformables explicites et génériques pour la segmentation 2D et 3D. Les implémentations de notre contour actif 2D et de notre surface active 3D, respectivement une courbe polygonale et un maillage triangulaire, ont été décrites à l’aide d’un formalisme unifié. Couplés avec un algorithme d’évolution générant une déformation rapide ainsi qu’avec une technique de reparamétrisation assurant la flexibilité géométrique, nos modèles déformables se sont révélés à même de segmenter des structures complexes, aussi bien dans des données synthétiques que réelles.

Nous nous sommes ensuite focalisés sur l’évolution de la surface. Nous avons proposé des techniques d’accélération de l’algorithme glouton pour la déformation de notre modèle de surface active. Ces techniques, basées sur des optimisations des espaces de recherche locaux, ont permis des gains de vitesse significatifs. Les différentes méthodes d’accélération ont été comparées entre elles sur des critères de coût calculatoire mais également de qualité de segmentation, celle-ci étant quantifiée à l’aide d’une métrique appropriée. L’algorithme glouton à fenêtre normale s’est avéré l’amélioration la plus efficace en terme de temps de calcul sans dégradation de la précision par rapport à la vérité terrain.

Concernant l’attache aux données, nous avons développé un nouveau type d’énergie de région se démarquant des termes de région classiques par l’utilisation du principe de la bande étroite. En formulant notre critère région dans un voisinage du contour ou de la surface, nous avons surpassé les limites des modèles déformables basés contour tout en nous

affranchissant d'hypothèses contraignantes sur les distributions des intensités couramment admises dans les approches région classiques. La comparaison avec un modèle implicite basé sur les ensembles de niveaux a mis en lumière l'intérêt de la représentation explicite et de la bande étroite. Sur un plan plus théorique, le raisonnement mathématique mené nous a permis d'approcher les intégrales de domaines intervenant dans l'énergie de région en bande étroite, l'approximation obtenue étant propice à une implémentation sur nos modèles explicites. En utilisant les outils de calcul variationnel et de dérivation directionnelle, nous avons défini de manière rigoureuse la condition de minimalité de l'énergie de région.

Enfin, nous avons présenté une extension de notre modèle de surface dédiée au suivi du ventricule gauche au cours du cycle cardiaque en IRM. Pour éviter le suivi séquentiel, sujet à la propagation des erreurs de segmentation, le modèle développé est une surface temporelle évoluant dans l'ensemble de la séquence cardiaque, la segmentation et le suivi étant traités comme un unique problème d'optimisation. Notre surface temporelle de topologie cylindrique a su exploiter la cohérence spatiale et temporelle des données, notamment grâce à sa structure 3D+T et à l'utilisation d'énergies de régularisation. Nous avons validé la méthode par des expérimentations sur une base de séquences cardiaques acquises sur des patients sains et pathologiques. L'évaluation de la fraction d'éjection a permis de montrer que l'erreur commise par notre méthode était faible en regard de la variabilité existante entre les différents examens.

7.2 Perspectives

Les perspectives de nos travaux sont multiples. En premier lieu, il serait intéressant d'approfondir l'aspect topologique de nos modèles déformables. Jusqu'à présent, la topologie de nos modèles explicites a été figée, ce qui n'a pas posé problème de par la connaissance *a priori* dont nous disposions sur la topologie des structures recherchées. Par ailleurs, les améliorations proposées telles que les accélérations de l'algorithme glouton ou l'énergie de région en bande étroite étaient indépendantes de la topologie du contour ou de la surface. Afin d'augmenter la flexibilité de nos modèles, des méthodes de changement de topologie comme celle de Lachaud et Montanvert [LM99] pourraient être implémentées. Outre une souplesse accrue des modèles, la comparaison avec les ensembles de niveaux gagnerait en pertinence car elle porterait ainsi sur des modèles de capacités équivalentes.

Les ensembles de niveaux seront également l'objet de travaux approfondis. Nous les avons considérés jusqu'à maintenant comme une méthode concurrente. Afin d'améliorer leurs performances, nous envisageons une approche multi-résolution, consistant à déformer une surface implémentée en ensembles de niveaux dans une image fortement sous-échantillonnée puis à augmenter progressivement la résolution de l'image une fois la surface stabilisée. La segmentation fonctionnerait alors par raffinements successifs des frontières estimées. Par ailleurs, un des inconvénients majeurs des ensembles de niveaux que nous

avons mis en évidence est leur faible capacité de régularisation. Ils sont en effet discrétisés sur une grille de résolution identique à celle de l'image. De plus, la courbure de la fonction d'ensembles de niveaux a un effet restreint au voisinage du point considéré. Pour remédier à cet inconvénient, nous envisageons de développer une méthode de lissage diffus pour les ensembles de niveaux, le but de cette méthode étant d'atteindre un niveau de rigidité similaire à celui du contour paramétrique obtenu avec le lissage gaussien présenté au chapitre 5.

Nous allons également poursuivre le développement de l'énergie de région en bande étroite. Des éléments de justification supplémentaires du principe de la bande étroite seront amenés en implémentant cette approche sur les ensembles de niveaux. A l'inverse, nous implémenterons une énergie de région classique sur nos modèles explicites en nous basant sur les théorèmes de Green-Riemann et de Green-Ostrogradski abordés au chapitre 5. Comme tout terme basé région, le formalisme de notre énergie lui permet d'être étendue à des images multi-composantes, en remplaçant l'intensité I par le vecteur de composantes. Ainsi, l'approche région en bande étroite pourrait être appliquée sur des images couleur, différents espaces colorimétriques pouvant être considérés, ou sur des images texturées, les composantes du vecteur étant les caractéristiques de texture associées au pixel considéré.

Enfin, un certain nombre d'extensions du modèle de surface 3D+T reste à accomplir. Nous souhaitons automatiser entièrement l'initialisation de la surface dans la séquence cardiaque, comme dans les travaux de Pednekar *et al* [PKM⁺06]. Afin de déterminer le centre du ventricule gauche dans chaque coupe, nous comptons réaliser la fusion d'indices visuels comme l'intensité moyenne, la quantité de variation des intensités au cours de la séquence ainsi que les coefficients de la transformée de Hough circulaire. En plus de fournir une initialisation à notre surface cylindrique, ces informations pourraient être exploitées pour la segmentation elle-même. En outre, nous souhaitons améliorer la modélisation du mouvement cardiaque. Notre énergie de régularisation temporelle actuelle est générale et s'accommode de tout mouvement régulier. Il est néanmoins possible de la spécialiser à la contraction ventriculaire et contraindre davantage notre surface 3D+T afin de diminuer le risque d'erreurs de segmentation. Pour cela, nous exploiterons la spécificité du mouvement du ventricule, qui est une contraction suivie d'une dilatation. Enfin, nous envisageons de généraliser le suivi à toute la structure cardiaque, notamment au ventricule droit ainsi qu'à l'épicarde. L'information de déformation des parois endocardique et épicaudique permettrait alors d'estimer l'épaississement du myocarde, paramètre important pour le diagnostic d'une pathologie.

Annexe A

Energie de région en bande étroite

Les développements mathématiques présentés dans cette annexe se rapportent à l'énergie de région en bande étroite du chapitre 5.

A.1 Caractéristiques de la courbe parallèle

A.1.1 Élément de longueur

Les calculs présentés ici se rapportent à la section 5.1.4. Le but est d'exprimer l'élément de longueur de la courbe parallèle, noté $\ell_{[B]}$, en fonction de l'élément de longueur ℓ . Nous utilisons la notation x' pour désigner la dérivée de x par rapport à u , de sorte que :

$$\ell = \sqrt{x'^2 + y'^2}$$

Lorsque la courbe Γ est paramétrée dans le sens anti-horaire, la normale intérieure unitaire est :

$$\mathbf{n} = \frac{(-y', x')^T}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}$$

En développant $\mathbf{c}_{[B]} = (x_{[B]}(u), y_{[B]}(u))^T$, il vient :

$$\begin{cases} x_{[B]} &= x - B \frac{y'}{\ell} \\ y_{[B]} &= y + B \frac{x'}{\ell} \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

Nous montrons ici que l'élément de longueur de la courbe parallèle s'exprime en fonction de l'élément de longueur de la courbe initiale ainsi que de sa courbure. Développons l'élément

de longueur au carré $\ell_{[B]}^2$:

$$\ell_{[B]}^2 = \left\| \frac{d\mathbf{c}_{[B]}}{du} \right\|^2 = (x_{[B]'})^2 + (y_{[B]'})^2$$

Nous admettons que la courbe est paramétrée proportionnellement à son abscisse curviligne s , de sorte que l'élément de longueur ℓ est constant. Pourtant, une fois le contour discrétisé en polygone, l'élément de longueur, assimilé à la distance entre sommets successifs, n'est pas constant. Selon le critère de remaillage, il varie entre w et $2w$. Cependant, pour les besoins de la modélisation, l'hypothèse selon laquelle la courbe est paramétrée par son abscisse curviligne, donnant $\ell = 1$, est couramment admise [DP95; JBU04; ZY96]. Dans notre cas, d'après l'équation A.1, les dérivées $x_{[B]'}$ et $y_{[B]'}$ s'écrivent :

$$\begin{cases} x_{[B]}' &= x' - B \frac{y''}{\ell} \\ y_{[B]}' &= y' + B \frac{x''}{\ell} \end{cases}$$

En réinjectant ce résultat dans l'expression de $\ell_{[B]}^2$, nous développons :

$$\begin{aligned} \ell_{[B]}^2 &= \left(x' - B \frac{y''}{\ell} \right)^2 + \left(y' + B \frac{x''}{\ell} \right)^2 \\ &= (x')^2 + \frac{B^2}{\ell^2} (y'')^2 - 2 \frac{B}{\ell} x' y'' + (y')^2 + \frac{B^2}{\ell^2} (x'')^2 + 2 \frac{B}{\ell} x'' y' \\ &= ((x')^2 + (y')^2) + \frac{B^2}{\ell^2} ((x'')^2 + (y'')^2) + 2 \frac{B}{\ell} (x'' y' - x' y'') \end{aligned}$$

A ce stade, nous faisons intervenir la courbure pour simplifier l'expression. Nous rappelons que la courbure κ de Γ s'écrit :

$$\kappa(u) = \frac{x' y'' - x'' y'}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x' y'' - x'' y'}{\ell^3} \quad (\text{A.2})$$

Ainsi, l'expression $x'' y' - x' y''$ peut se réécrire $-\ell^3 \kappa$. De plus, lorsque ℓ est constant, il est démontré dans [JBU04] que :

$$x''^2 + y''^2 = \ell^4 \kappa^2 \quad (\text{A.3})$$

ce qui nous permet de simplifier $\ell_{[B]}^2$:

$$\ell_{[B]}^2 = \ell^2 + B^2 \ell^2 \kappa^2 - 2B \ell^2 \kappa = \ell^2 (1 - B \kappa)^2$$

Par conséquent, l'expression finale de $\ell_{[B]}$ en fonction de ℓ est :

$$\ell_{[B]} = \ell |1 - B \kappa|$$

A.1.2 Courbure

La courbure de la courbe parallèle, notée $\kappa_{[B]}$, est obtenue en considérant l'équation A.2 et en remplaçant toutes les quantités par leur équivalent dans la courbe parallèle. On obtient ainsi :

$$\kappa_{[B]} = \frac{x_{[B]}' y_{[B]}'' - x_{[B]}'' y_{[B]}'}{\ell_{[B]}^3}$$

D'après A.1, nous développons les dérivées première et seconde de $x_{[B]}$ et $y_{[B]}$. La courbure se développe alors en :

$$\begin{aligned} \kappa_{[B]} &= \frac{\left(x' - \frac{B}{\ell} y''\right) \left(y'' + \frac{B}{\ell} x'''\right) - \left(x'' - \frac{B}{\ell} y'''\right) \left(y' + \frac{B}{\ell} x''\right)}{\ell^3 (1 - B\kappa)^3} \\ &= \frac{(x' y'' - x'' y') - \frac{B}{\ell} (x' x''' + y' y''' - x''^2 - y''^2) + \frac{B^2}{\ell^2} (x'' y''' - x''' y'')}{\ell^3 (1 - B\kappa)^3} \end{aligned}$$

Or, comme ℓ est constant, nous avons $\ell' = x' x'' + y' y'' = 0$, d'où :

$$\ell'' = (x' x'' + y' y'')' = x' x''' + y' y''' + x''^2 + y''^2 = 0$$

En considérant cette égalité conjointement avec celle de l'équation A.3, nous écrivons :

$$x' x''' + y' y''' = -(x''^2 + y''^2) = -\ell^4 \kappa^2$$

En utilisant ce résultat d'une part et $x' y'' - x'' y' = \ell^3 \kappa$ d'autre part, la courbure de $\Gamma_{[B]}$ se simplifie finalement en :

$$\kappa_{[B]} = \frac{\kappa(1 - 2B\kappa)}{(1 - B\kappa)^3} + \frac{B^2(x'' y''' - x''' y'')}{\ell(1 - B\kappa)^3} \quad (\text{A.4})$$

A.2 Aire de la bande

A.2.1 Intégration des périmètres

L'aire de la bande $\mathcal{A}(\mathcal{B}_{in})$ est tout d'abord calculée par l'estimation $\hat{J}(f, \mathcal{B}_{in})$ avec $f(\mathbf{x}) = 1, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}(\mathcal{B}_{in}) &= \int_0^B \int_{\Omega} \left\| \frac{d\mathbf{c}_{[b]}}{du} \right\| du db \\
 &= \int_0^B \int_{\Omega} \ell(1 - b\kappa(u)) du db \\
 &= \int_{\Omega} \left[b\ell - \frac{b^2\ell}{2}\kappa(u) \right]_{b=0}^{b=B} du \\
 &= \int_{\Omega} B\ell - \frac{B^2\ell}{2}\kappa(u) du
 \end{aligned} \tag{A.5}$$

De la même façon, on obtient pour $\mathcal{A}(\mathcal{B}_{out})$:

$$\mathcal{A}(\mathcal{B}_{out}) = \int_{\Omega} B\ell + \frac{B^2\ell}{2}\kappa(u) du \tag{A.6}$$

Si la courbe Γ est un cercle, u est défini sur le domaine $\Omega = [0, 2\pi]$ et ℓ est le rayon du cercle. De plus, la courbure est constante : $\kappa = \frac{1}{\ell}$. La bande intérieure est une couronne dont l'aire est :

$$\mathcal{A}(\mathcal{B}_{in}) = \int_0^{2\pi} B\ell - \frac{B^2}{2} du = 2\pi B\ell - \pi B^2$$

qui est bien la différence d'aire entre les cercles de rayons respectifs ℓ et $\ell - B$: $\pi\ell^2 - \pi(\ell - B)^2 = 2\pi\ell B - \pi B^2$.

A.2.2 Preuve avec le théorème de Green-Riemann

Nous calculons ici l'aire de la bande \mathcal{B}_{in} comme la différence d'aire entre la région R_{in} et la région $R_{in[B]}$, délimitée par la courbe parallèle intérieure $\Gamma_{[B]}$:

$$\mathcal{A}(\mathcal{B}_{in}) = \mathcal{A}(R_{in}) - \mathcal{A}(R_{in[B]})$$

Les deux aires sont exprimées en intégrales de contour par le théorème de Green-Riemann :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}(R_{in}) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} xy' - yx' du \\
 \mathcal{A}(R_{in[B]}) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} x_{[B]}y_{[B]}' - y_{[B]}x_{[B]}' du
 \end{aligned}$$

Développons $\mathcal{A}(R_{in[B]})$:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(R_{in[B]}) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} x_{[B]} y_{[B]}' - y_{[B]} x_{[B]}' \, du \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(x - B \frac{y'}{\ell} \right) \left(y' + B \frac{x''\ell - x'\ell'}{\ell^2} \right) - \left(y + B \frac{x'}{\ell} \right) \left(x' - B \frac{y''\ell - y'\ell'}{\ell^2} \right) \, du \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (xy' - x'y) + \frac{B}{\ell}(xx'' + yy'') - \frac{B\ell'}{\ell^2}(xx' + yy') - B\ell + \frac{B^2}{\ell^2}(x'y'' - x''y') \, du\end{aligned}$$

En utilisant les simplifications $x'y'' - x''y' = \kappa\ell^3$ et $\ell' = 0$, il vient :

$$\mathcal{A}(R_{in[B]}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (xy' - x'y) - B\ell + B^2\ell\kappa(u) + \frac{B}{\ell}(xx'' + yy'') \, du$$

Dans l'expression de l'aire de la bande, les quantités $xy' - yx'$ s'annulent de par et d'autre :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\mathcal{B}_{in}) &= \mathcal{A}(R_{in}) - \mathcal{A}(R_{in[B]}) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} B\ell - B^2\ell\kappa(u) - \frac{B}{\ell}(xx'' + yy'') \, du \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} B\ell - B^2\ell\kappa(u) \, du - \frac{B}{2\ell} \int_{\Omega} xx'' + yy'' \, du\end{aligned}$$

Nous développons le second terme par intégration par parties :

$$\mathcal{A}(\mathcal{B}_{in}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} B\ell - B^2\ell\kappa(u) \, du - \frac{B}{2\ell} \left([xx' + yy']_{u=0}^{u=1} - \int_{\Omega} x'^2 + y'^2 \, du \right)$$

Puisque la courbe est fermée, on a $\mathbf{c}(0) = \mathbf{c}(1)$ et $\mathbf{c}'(0) = \mathbf{c}'(1)$. Par conséquent, la quantité $[xx' + yy']$ s'annule entre 0 et 1. Nous obtenons :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\mathcal{B}_{in}) &= \int_{\Omega} \frac{B\ell}{2} - \frac{B^2\ell}{2}\kappa(u) \, du + \frac{B}{2\ell} \int_{\Omega} \ell^2 \, du \\ &= \int_{\Omega} B\ell - \frac{B^2\ell}{2}\kappa(u) \, du\end{aligned}$$

qui est identique au résultat de l'équation A.5, ce qui prouve que l'approximation de l'intégrale de bande est exacte pour $f = 1$.

A.3 Calcul des variations

Cette annexe est relative à la section 5.1.5, dans laquelle nous calculons les variations de l'énergie de région en bande étroite. Nous détaillons ici les calculs de la dérivée fonctionnelle de $J(f, R_{in[B]})$, afin de déterminer l'équation d'Euler-Lagrange correspondante :

$$\frac{\delta J(f, R_{in[B]})}{\delta \mathbf{c}} = \mathbf{0}$$

L'intégrale de domaine $J(f, R_{in[B]})$ est développée en intégrale de contour grâce au théorème de Green-Riemann :

$$\begin{aligned} J(f, R_{in[B]}) &= \iint_{R_{in[B]}} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} y_{[B]}' Q(\mathbf{c}_{[B]}) + x_{[B]}' P(\mathbf{c}_{[B]}) du \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} Q(x, y) &= \int_{-\infty}^x f(t, y) dt \\ P(x, y) &= - \int_{-\infty}^y f(x, t) dt \end{aligned}$$

En exprimant $J(f, R_{in[B]})$ sous la forme de l'équation 5.24, \mathcal{L} s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x, x', x'', y, y', y'') &= \\ \frac{1}{2} \left(\left(x' - \frac{B}{\ell} y'' \right) P \left(x - \frac{B}{\ell} y', y + \frac{B}{\ell} x' \right) + \left(y' + \frac{B}{\ell} x'' \right) Q \left(x - \frac{B}{\ell} y', y + \frac{B}{\ell} x' \right) \right) \end{aligned}$$

En utilisant les simplifications $\partial Q/\partial x = f$ et $\partial P/\partial y = -f$ dès que possible, les différents termes de la dérivée fonctionnelle en x , dont la forme générale est donnée à l'équation 5.25, se développent en :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} &= \frac{1}{2} \left(\left(x' - \frac{B}{\ell} y'' \right) \frac{\partial P(\mathbf{c}_{[B]})}{\partial x} + \left(y' + \frac{B}{\ell} x'' \right) \frac{\partial Q(\mathbf{c}_{[B]})}{\partial x} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(x_{[B]}' \frac{\partial P(\mathbf{c}_{[B]})}{\partial x} + y_{[B]}' f(\mathbf{c}_{[B]}) \right) \\ \frac{d}{du} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'} &= \frac{1}{2} \frac{d}{du} \left[P(\mathbf{c}_{[B]}) + \frac{B}{\ell} x_{[B]}' \frac{\partial P(\mathbf{c}_{[B]})}{\partial y} + \frac{B}{\ell} y_{[B]}' \frac{\partial Q(\mathbf{c}_{[B]})}{\partial y} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(x_{[B]}' \frac{\partial P(\mathbf{c}_{[B]})}{\partial x} - y_{[B]}' f(\mathbf{c}_{[B]}) - \frac{B}{\ell} x_{[B]}' f(\mathbf{c}_{[B]}) - \frac{B}{\ell} (x_{[B]}')^2 \frac{\partial f(\mathbf{c}_{[B]})}{\partial x} \right. \\ &\quad \left. + \frac{B}{\ell} y_{[B]}' \frac{\partial Q(\mathbf{c}_{[B]})}{\partial y} + \frac{B}{\ell} (y_{[B]}')^2 \frac{\partial^2 Q(\mathbf{c}_{[B]})}{\partial y^2} \right) \\ \frac{d^2}{du^2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x''} &= \frac{1}{2} \frac{d^2}{du^2} \left[\frac{B}{\ell} Q(x_{[B]}, y_{[B]}) \right] \\ &= \frac{B}{2\ell} \frac{d}{du} \left[x_{[B]}' \frac{\partial Q(\mathbf{c}_{[B]})}{\partial x} + y_{[B]}' \frac{\partial Q(\mathbf{c}_{[B]})}{\partial y} \right] \\ &= \frac{B}{2\ell} \left(x_{[B]}' f(\mathbf{c}_{[B]}) + x_{[B]}'^2 \frac{\partial f(\mathbf{c}_{[B]})}{\partial x} + 2x_{[B]}' y_{[B]}' \frac{\partial f(\mathbf{c}_{[B]})}{\partial y} \right. \\ &\quad \left. + y_{[B]}' \frac{\partial Q(\mathbf{c}_{[B]})}{\partial y} + y_{[B]}'^2 \frac{\partial^2 Q(\mathbf{c}_{[B]})}{\partial y^2} \right) \end{aligned}$$

En appliquant le même développement pour la dérivée fonctionnelle en y , nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} &= \frac{1}{2} \left(\left(x' - \frac{B}{\ell} y'' \right) \frac{\partial P(\mathbf{c}_{[B]})}{\partial y} + \left(y' + \frac{B}{\ell} x'' \right) \frac{\partial Q(\mathbf{c}_{[B]})}{\partial y} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(-x_{[B]}' f(\mathbf{c}_{[B]}) + y_{[B]}' \frac{\partial Q(\mathbf{c}_{[B]})}{\partial y} \right) \\
\frac{d}{du} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} &= \frac{1}{2} \frac{d}{du} \left[Q(\mathbf{c}_{[B]}) - \frac{B}{\ell} x_{[B]}' \frac{\partial P(\mathbf{c}_{[B]})}{\partial x} - \frac{B}{\ell} y_{[B]}' \frac{\partial Q(\mathbf{c}_{[B]})}{\partial x} \right] \\
&= \frac{1}{2} \left(-\frac{B}{\ell} x_{[B]}' \frac{\partial P(\mathbf{c}_{[B]})}{\partial x} - \frac{B}{\ell} (x_{[B]}')^2 \frac{\partial^2 P(\mathbf{c}_{[B]})}{\partial x^2} + x_{[B]}' f(\mathbf{c}_{[B]}) \right. \\
&\quad \left. + y_{[B]}' \frac{\partial Q(\mathbf{c}_{[B]})}{\partial y} - \frac{B}{\ell} y_{[B]}' \frac{\partial f(\mathbf{c}_{[B]})}{\partial y} - \frac{B}{\ell} (y_{[B]}')^2 \frac{\partial^2 f(\mathbf{c}_{[B]})}{\partial y^2} \right) \\
\frac{d^2}{du^2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y''} &= \frac{1}{2} \frac{d^2}{du^2} \left[-\frac{B}{\ell} P(x_{[B]}, y_{[B]}) \right] \\
&= \frac{B}{2\ell} \frac{d}{du} \left[-x_{[B]}' \frac{\partial P(\mathbf{c}_{[B]})}{\partial x} + y_{[B]}' f(\mathbf{c}_{[B]}) \right] \\
&= \frac{B}{2\ell} \left(-x_{[B]}' \frac{\partial P(\mathbf{c}_{[B]})}{\partial x} + (x_{[B]}')^2 \frac{\partial^2 P(\mathbf{c}_{[B]})}{\partial x^2} + y_{[B]}' f(\mathbf{c}_{[B]}) \right. \\
&\quad \left. + 2x_{[B]}' y_{[B]}' \frac{\partial f(\mathbf{c}_{[B]})}{\partial x} + (y_{[B]}')^2 \frac{\partial^2 f(\mathbf{c}_{[B]})}{\partial y^2} \right)
\end{aligned}$$

Les expressions se simplifient :

$$\begin{aligned}
\frac{\delta J(f, R_{in[B]})}{\delta x} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} - \frac{d}{du} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'} + \frac{d^2}{du^2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x''} \\
&= \frac{1}{2} f(\mathbf{c}_{[B]}) \left(y_{[B]}' + \frac{B}{\ell} x_{[B]}' \right) + \frac{B}{2\ell} \left((x_{[B]}')^2 \frac{\partial f}{\partial x} + 2x_{[B]}' y_{[B]}' \frac{\partial f}{\partial y} \right) \\
\frac{\delta J(f, R_{in[B]})}{\delta y} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} - \frac{d}{du} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} + \frac{d^2}{du^2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y''} \\
&= \frac{1}{2} f(\mathbf{c}_{[B]}) \left(-x_{[B]}' + \frac{B}{\ell} y_{[B]}' \right) + \frac{B}{2\ell} \left(2x_{[B]}' y_{[B]}' \frac{\partial f}{\partial x} + (y_{[B]}')^2 \frac{\partial f}{\partial y} \right)
\end{aligned}$$

La dérivée fonctionnelle s'écrit alors sous forme matricielle :

$$\begin{aligned}
\frac{\delta J(f, R_{in[B]})}{\delta \mathbf{c}} &= \frac{1}{2} f(\mathbf{c}_{[B]}) \begin{bmatrix} y_{[B]}' + \frac{B}{\ell} x_{[B]}' \\ -x_{[B]}' + \frac{B}{\ell} y_{[B]}' \end{bmatrix} \\
&\quad + \frac{B}{2\ell} \begin{bmatrix} x_{[B]}'^2 & 2x_{[B]}' y_{[B]}' \\ 2x_{[B]}' y_{[B]}' & y_{[B]}'^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial f(\mathbf{c}_{[B]})}{\partial x} \\ \frac{\partial f(\mathbf{c}_{[B]})}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})
\end{aligned}$$

A.4 Dérivée directionnelle selon la normale

Nous détaillons ici les calculs de la dérivée directionnelle de l'énergie de région en bande étroite décrite à la section 5.1.6. Cette dérivation est dans un premier temps appliquée sur le terme exact $E_{\text{région}}$ puis sur l'approximation $\hat{E}_{\text{région}}$.

A.4.1 Dérivation de l'énergie exacte

Nous projetons la dérivée fonctionnelle de $J(f, R_{in[B]})$ sur le vecteur normal unitaire. L'expression complète de la dérivée de $J(f, R_{in[B]})$ étant donnée à l'équation 5.28 de l'annexe précédente, nous développons :

$$\begin{aligned}
& \frac{\delta J(f, R_{in[B]})}{\delta \mathbf{c}} \cdot \mathbf{n} \\
&= -\frac{y'}{\ell} \frac{\delta J(f, R_{in[B]})}{\delta x} + \frac{x'}{\ell} \frac{\delta J(f, R_{in[B]})}{\delta y} \\
&= \frac{1}{2} f(\mathbf{c}_{[B]}) \left(-\frac{y'}{\ell} \left(x_{[B]}' + \frac{B}{\ell} x_{[B]}'' \right) + \frac{x'}{\ell} \left(-x_{[B]}' + \frac{B}{\ell} y_{[B]}'' \right) \right) \\
&\quad - \frac{B}{2\ell^2} y' \left((x_{[B]}')^2 \frac{\partial f(\mathbf{c}_{[B]})}{\partial x} + 2x_{[B]}' y_{[B]}' \frac{\partial f(\mathbf{c}_{[B]})}{\partial y} \right) \\
&\quad + \frac{B}{2\ell^2} x' \left(2x_{[B]}' y_{[B]}' \frac{\partial f(\mathbf{c}_{[B]})}{\partial x} + (y_{[B]}')^2 \frac{\partial f(\mathbf{c}_{[B]})}{\partial y} \right) \\
&= \frac{1}{2\ell} f(\mathbf{c}_{[B]}) \left(-(x'^2 + y'^2) + \frac{2B}{\ell} (x'y'' - x''y') + \frac{B^2}{\ell^2} (x'x''' + y'y''') \right) \\
&\quad + \frac{B}{2\ell^2} \frac{\partial f(\mathbf{c}_{[B]})}{\partial x} \left(x'^2 y' + \frac{B}{\ell} (x'y'y'' + (x')^2 x'') + \frac{B^2}{\ell^2} (-y'(y'')^2 - x'x''y'') \right) \\
&\quad + \frac{B}{2\ell^2} \frac{\partial f(\mathbf{c}_{[B]})}{\partial y} \left(x'y'^2 + \frac{B}{\ell} (x'y'x'' + (y')^2 y'') + \frac{B^2}{\ell^2} (x'(x'')^2 - y'x''y'') \right) \\
&= \frac{1}{2\ell} f(\mathbf{c}_{[B]}) \left(-\ell^2 + 2B\ell^2 \kappa + \frac{B^2}{\ell^2} (x'x''' + y'y''') \right) \\
&\quad + \frac{B}{2\ell^2} \frac{\partial f(\mathbf{c}_{[B]})}{\partial x} \left(x'^2 y' + \frac{B}{\ell} x'(x'x'' + y'y'') - \frac{B^2}{\ell^2} y''(x'x'' + y'y'') \right) \\
&\quad + \frac{B}{2\ell^2} \frac{\partial f(\mathbf{c}_{[B]})}{\partial y} \left(x'y'^2 + \frac{B}{\ell} y'(x'x'' + y'y'') - \frac{B^2}{\ell^2} x''(x'x'' + y'y'') \right)
\end{aligned}$$

En utilisant les identités $x'x'' + y'y'' = \ell' = 0$ et $x'x''' + x''x''' = -\ell^4\kappa^2$, il vient :

$$\begin{aligned} \frac{\delta J(f, R_{in[B]})}{\delta \mathbf{c}} \cdot \mathbf{n} &= \frac{1}{2\ell} (-\ell^2 + 2B\ell^2\kappa - B^2\ell^2\kappa^2) f(\mathbf{c}_{[B]}) \\ &\quad + \frac{B}{2\ell^2} x'y' \left(x' \frac{\partial f(\mathbf{c}_{[B]})}{\partial x} + y' \frac{\partial f(\mathbf{c}_{[B]})}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\ell}{2} (2B\kappa - B^2\kappa^2 - 1) f(\mathbf{c}_{[B]}) + \frac{B}{2\ell} x'y' \nabla f(\mathbf{c}_{[B]}) \cdot \mathbf{t} \\ &= -\frac{\ell}{2} (1 - B\kappa)^2 f(\mathbf{c}_{[B]}) + \frac{B}{2\ell} x'y' \nabla f(\mathbf{c}_{[B]}) \cdot \mathbf{t} \end{aligned}$$

qui est l'expression finale du terme général $\langle J(f, R_{in[B]})', \mathbf{n} \rangle$. Ce terme est utilisé dans la dérivation directionnelle de l'énergie $E_{\text{région}}$ à la section 5.1.6.

A.4.2 Dérivée de l'énergie approchée

Nous considérons l'estimation générale d'intégrale sur le domaine \mathcal{B}_{in} :

$$\hat{J}(f, \mathcal{B}_{in}) = \int_{\Omega} \int_0^B f(\mathbf{c} + b\mathbf{n}) \ell (1 - b\kappa) db du$$

Dans un premier temps, nous déterminons les dérivées directionnelles des éléments de base qui composent l'approximation $\hat{J}(f, \mathcal{B}_{in})$. L'élément de longueur et la courbure sont interprétées comme des fonctions de $\mathbf{c} = (x, y)^T$:

$$\begin{aligned} \ell(\mathbf{c}) &= \sqrt{x'^2 + y'^2} \\ \kappa(\mathbf{c}) &= \frac{x'y'' - x''y'}{\ell(\mathbf{c})^3} \end{aligned}$$

Dans la définition de la dérivée directionnelle 5.31, en remplaçant τ par B et en posant $f = \ell$, nous retrouvons l'expression de l'élément de longueur parallèle $\ell_{[B]}$, de sorte que la dérivée de $\ell_{[B]}$ par rapport à B , lorsqu'elle est évaluée à $B = 0$, est la dérivée directionnelle de ℓ selon la normale. Il en est de même pour la fonction de courbure.

La dérivation de l'élément de longueur est basée sur le résultat de l'équation 5.18 :

$$\begin{aligned} \langle \ell', \mathbf{n} \rangle &= \left. \frac{d\ell_{[B]}}{dB} \right|_{B=0} \\ &= \left. \frac{d}{dB} \{ \ell(1 - B\kappa) \} \right|_{B=0} \\ &= -\ell\kappa \end{aligned}$$

Pour calculer la dérivée directionnelle de κ , nous dérivons $\kappa_{[B]}$ par rapport à B . L'expression de $\kappa_{[B]}$ a été calculée dans l'équation A.4 de l'annexe A.1.2. Nous avons :

$$\begin{aligned}
\langle \kappa', \mathbf{n} \rangle &= \left. \frac{d\kappa_{[B]}}{dB} \right|_{B=0} \\
&= \left. \frac{d}{dB} \left\{ \frac{\kappa(1-2B\kappa)}{(1-B\kappa)^3} + \frac{B^2(x''y''' - x'''y'')}{\ell(1-B\kappa)^3} \right\} \right|_{B=0} \\
&= \frac{-2\kappa^2(1-B\kappa)^3 + 3\kappa^2(1-2B\kappa)(1-B\kappa)}{(1-B\kappa)^6} + \left. \frac{2B(x''y''' - x'''y'')}{\ell(1-B\kappa)^3} \right|_{B=0} \\
&= \kappa^2
\end{aligned}$$

Etant données les dérivées directionnelles $\langle \ell', \mathbf{n} \rangle$ et $\langle \kappa', \mathbf{n} \rangle$, il vient :

$$\begin{aligned}
\langle \ell_{[B]}', \mathbf{n} \rangle &= \langle \ell(1-B\kappa)', \mathbf{n} \rangle \\
&= \langle \ell', \mathbf{n} \rangle (1-B\kappa) - B\ell \langle \kappa', \mathbf{n} \rangle \\
&= -\ell\kappa
\end{aligned}$$

Le même principe s'applique à f :

$$\langle f(\mathbf{c} + b\mathbf{n})', \mathbf{n} \rangle = \frac{d}{db} f(\mathbf{c} + b\mathbf{n})$$

Ainsi, nous disposons des dérivées directionnelles de tous les éléments composants l'estimation $\langle \hat{J}(f, \mathcal{B}_{in})', \mathbf{n} \rangle$. Celle-ci peut donc être dérivée à son tour :

$$\begin{aligned}
&\langle \hat{J}(f, \mathcal{B}_{in})', \mathbf{n} \rangle \\
&= \int_0^B \langle f(\mathbf{c} + b\mathbf{n})', \mathbf{n} \rangle \ell(1-b\kappa) + \int_0^B f(\mathbf{c} + b\mathbf{n}) \langle (\ell(1-b\kappa))', \mathbf{n} \rangle db \\
&= \int_0^B \left(\frac{d}{db} f(\mathbf{c} + b\mathbf{n}) \right) \ell(1-b\kappa) db - \ell\kappa \int_0^B f(\mathbf{c} + b\mathbf{n}) db
\end{aligned}$$

L'intégration par parties donne :

$$\begin{aligned}
&\langle \hat{J}(f, \mathcal{B}_{in})', \mathbf{n} \rangle \\
&= [f(\mathbf{c} + b\mathbf{n})\ell(1-b\kappa)]_{b=0}^{b=B} + \ell\kappa \int_0^B f(\mathbf{c} + b\mathbf{n}) db - \ell\kappa \int_0^B f(\mathbf{c} + b\mathbf{n}) db \\
&= \ell((1-B\kappa)f(\mathbf{c} + B\mathbf{n}) - f(\mathbf{c}))
\end{aligned}$$

En suivant une démarche similaire pour le terme général $\hat{J}(f, \mathcal{B}_{out})$ sur la bande extérieure,

on obtient :

$$\begin{aligned}
& \langle \hat{J}(f, \mathcal{B}_{out})', \mathbf{n} \rangle \\
&= \int_0^B \langle f(\mathbf{c} - b\mathbf{n})', \mathbf{n} \rangle \ell(1 + b\kappa) db + \int_0^B f(\mathbf{c} - b\mathbf{n}) \langle (\ell(1 + b\kappa))', \mathbf{n} \rangle db \\
&= - \int_0^B \left(\frac{d}{db} f(\mathbf{c} - b\mathbf{n}) \right) \ell(1 + b\kappa) db - \ell\kappa \int_0^B f(\mathbf{c} - b\mathbf{n}) db \\
&= - [f(\mathbf{c} - b\mathbf{n})\ell(1 + b\kappa)]_{b=0}^{b=B} + \ell\kappa \int_0^B f(\mathbf{c} - b\mathbf{n}) db - \ell\kappa \int_0^B f(\mathbf{c} - b\mathbf{n}) db \\
&= \ell (f(\mathbf{c}) - (1 + B\kappa)f(\mathbf{c} - B\mathbf{n}))
\end{aligned}$$

A.5 Élément de surface

L'implémentation de l'énergie de région en bande étroite sur la surface décrite à la section 5.2.4 nécessite l'approximation d'intégrales de volume. Nous détaillons ici la simplification de l'élément de surface qui intervient dans ces intégrales. L'élément de surface au carré $a_{[B]}^2$, associé à la surface parallèle $\mathbf{s}_{[B]}$, s'écrit :

$$\begin{aligned}
a_{[B]}^2 &= \left\| \frac{\partial(\mathbf{s} + B\mathbf{n})}{\partial u} \wedge \frac{\partial(\mathbf{s} + B\mathbf{n})}{\partial v} \right\|^2 \\
&= \left\| (\mathbf{s}_u + B\mathbf{n}_u) \wedge (\mathbf{s}_v + B\mathbf{n}_v) \right\|^2
\end{aligned}$$

En utilisant les identités remarquables suivantes :

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{p} + \mathbf{q}\|^2 &= \|\mathbf{p}\|^2 + \|\mathbf{q}\|^2 + 2(\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}) \\
\|\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}\|^2 &= \|\mathbf{p}\|^2 \|\mathbf{q}\|^2 - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{q})^2
\end{aligned}$$

l'élément de surface se développe :

$$\begin{aligned}
a_{[B]}^2 &= \left(\|\mathbf{s}_u\|^2 + \frac{B^2}{a^2} \|\mathbf{n}_u\|^2 + 2\frac{B}{a} \mathbf{s}_u \cdot \mathbf{n}_u \right) \left(\|\mathbf{s}_v\|^2 + \frac{B^2}{a^2} \|\mathbf{n}_v\|^2 + 2\frac{B}{a} \mathbf{s}_v \cdot \mathbf{n}_v \right) \\
&\quad - \left(\mathbf{s}_u \cdot \mathbf{s}_v + \frac{B}{a} (\mathbf{s}_u \cdot \mathbf{n}_v + \mathbf{s}_v \cdot \mathbf{n}_u) + \frac{B^2}{a^2} \mathbf{n}_u \cdot \mathbf{n}_v \right)^2 \\
&= \left(E + \frac{B^2}{a^2} \|\mathbf{n}_u\|^2 - 2\frac{B}{a} L \right) \left(G + \frac{B^2}{a^2} \|\mathbf{n}_v\|^2 - 2\frac{B}{a} N \right) \\
&\quad - \left(F - 2\frac{B}{a} M + \frac{B^2}{a^2} \mathbf{n}_u \cdot \mathbf{n}_v \right)^2 \\
&= X_0 + \frac{B}{a} X_1 + \frac{B^2}{a^2} X_2 + \frac{B^3}{a^3} X_3 + \frac{B^4}{a^4} X_4
\end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}
X_0 &= EG - F^2 \\
X_1 &= -2EN - 2LG + 4FM \\
X_2 &= E \|\mathbf{n}_v\|^2 + G \|\mathbf{n}_u\|^2 - 2F\mathbf{n}_u \cdot \mathbf{n}_v + 4LN - 4M^2 \\
X_3 &= -2N \|\mathbf{n}_u\|^2 - 2L \|\mathbf{n}_v\|^2 + 4M\mathbf{n}_u \cdot \mathbf{n}_v \\
X_4 &= \|\mathbf{n}_u\|^2 \|\mathbf{n}_v\|^2 - (\mathbf{n}_u \cdot \mathbf{n}_v)^2
\end{aligned}$$

Les dérivées en u et v du vecteur normal s'expriment comme des combinaisons des vecteurs tangents. Les égalités suivantes sont les équations de Weingarten au point $\mathbf{s}(u, v)$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{n}_u &= \frac{MF - LG}{EG - F^2} \mathbf{s}_u + \frac{LF - ME}{EG - F^2} \mathbf{s}_v \\
\mathbf{n}_v &= \frac{NF - MG}{EG - F^2} \mathbf{s}_u + \frac{MF - NE}{EG - F^2} \mathbf{s}_v
\end{aligned} \tag{A.8}$$

A la section 5.2.4, nous admettons que les vecteurs tangents \mathbf{s}_u et \mathbf{s}_v sont orthogonaux. Nous avons donc $\mathbf{s}_u \cdot \mathbf{s}_v = F = 0$, ce qui permet de simplifier les expressions des dérivées des normales ainsi que les courbures :

$$\begin{aligned}
\mathbf{n}_u &= -\frac{L}{E} \mathbf{s}_u - \frac{M}{G} \mathbf{s}_v & \mathbf{n}_v &= -\frac{M}{E} \mathbf{s}_u - \frac{N}{G} \mathbf{s}_v \\
\kappa_G &= \frac{LN - M^2}{EG} & \kappa_M &= \frac{GL + EN}{2EG}
\end{aligned}$$

Par ailleurs, nous avons :

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{n}_u\|^2 &= \frac{L^2}{E} + \frac{M^2}{G} & \|\mathbf{n}_v\|^2 &= \frac{M^2}{E} + \frac{N^2}{G} \\
\mathbf{n}_u \cdot \mathbf{n}_v &= \frac{LM}{E} + \frac{MN}{G}
\end{aligned}$$

Etant donné que $EG - F^2 = EG = a^2$, les termes de l'élément de surface se réécrivent :

$$X_0 = EG - F^2 = a^2$$

$$X_1 = -2(EN + LG) = -4a^2 \frac{EN + LG}{EG} = -4a^2 \kappa_M$$

$$\begin{aligned} I_2 &= E \|\mathbf{n}_v\|^2 + G \|\mathbf{n}_u\|^2 - 2F\mathbf{n}_u \cdot \mathbf{n}_v + 4LN - 4M^2 \\ &= E \left(\frac{M^2}{E} + \frac{N^2}{G} \right) + G \left(\frac{L^2}{E} + \frac{M^2}{G} \right) + 4LN - 4M^2 \\ &= \frac{E^2 N^2 + G^2 L^2}{EG} + 4LN - 2M^2 \\ &= \frac{E^2 N^2 + G^2 L^2 + 2ENGL}{EG} + 2(LN - M^2) \\ &= a^2(4\kappa_M^2 + 2\kappa_G) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_3 &= -2N \|\mathbf{n}_u\|^2 - 2L \|\mathbf{n}_v\|^2 + 4M\mathbf{n}_u \cdot \mathbf{n}_v \\ &= -2N \left(\frac{L^2}{E} + \frac{M^2}{G} \right) - 2L \left(\frac{M^2}{E} + \frac{N^2}{G} \right) + 4M \left(\frac{LM}{E} + \frac{MN}{G} \right) \\ &= \frac{-2GL^2 N + 2EM^2 N + 2GLM^2 - 2ELN^2}{EG} \\ &= -2 \frac{(GL + EN)(LN - M^2)}{EG} \\ &= -4a^2 \kappa_M \kappa_G \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_4 &= \left(\frac{L^2}{E} + \frac{M^2}{G} \right) \left(\frac{M^2}{E} + \frac{N^2}{G} \right) - \left(\frac{LM}{E} + \frac{MN}{G} \right)^2 \\ &= \frac{L^2 N^2 + M^4 + 2LM^2 N}{EG} \\ &= \frac{(LN - M^2)^2}{EG} \\ &= a^2 \kappa_G^2 \end{aligned}$$

Finalement, l'élément $a_{[B]}^2$ peut être factorisé en une expression dépendant des courbures principales κ_1 et κ_2 :

$$\begin{aligned}
a_{[B]}^2 &= a^2(1 - 4B\kappa_M + B^2(4\kappa_M^2 + 2\kappa_G) - 4B^3\kappa_M\kappa_G + B^4\kappa_G^2) \\
&= a^2(1 - 2B(\kappa_1 + \kappa_2) + B^2(\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + 4\kappa_1\kappa_2) - 2B^3\kappa_1\kappa_2(\kappa_1 + \kappa_2) + B^4(\kappa_1\kappa_2)^2) \\
&= a^2(1 - 2B\kappa_1 + B^2\kappa_1^2)(1 - 2B\kappa_2 + B^2\kappa_2^2) \\
&= a^2(1 - B\kappa_1)^2(1 - B\kappa_2)^2
\end{aligned}$$

A.6 Dérivée de l'énergie de région 3D selon la normale

Nous détaillons ici les calculs de la dérivée directionnelle de l'énergie de région en bande étroite sur la surface abordée à la section 5.2.5.

A l'instar de l'élément de longueur de la section précédente, la dérivée directionnelle de a peut être obtenue en dérivant $a_{[B]}$ par rapport à B . Il en est de même pour les courbures gaussienne et moyenne. On a donc :

$$\begin{aligned}
\langle a', \mathbf{n} \rangle &= \left. \frac{da_{[B]}}{dB} \right|_{B=0} \\
&= \left. \frac{d}{dB} \{a(1 - B\kappa_M + B^2\kappa_G)\} \right|_{B=0} \\
&= a(-2\kappa_M + 2B\kappa_G)|_{B=0} \\
&= -2a\kappa_M
\end{aligned}$$

Les courbures gaussienne $\kappa_{G[B]}$ et moyenne $\kappa_{M[B]}$ de la surface parallèle $\Gamma_{[B]}$, que le lecteur pourra retrouver dans [Exn03] et [OS07], s'expriment comme suit :

$$\begin{aligned}
\kappa_{G[B]} &= \frac{\kappa_G}{1 - 2B\kappa_M + B^2\kappa_G} \\
\kappa_{M[B]} &= \frac{\kappa_M - B\kappa_G}{1 - 2B\kappa_M + B^2\kappa_G}
\end{aligned} \tag{A.9}$$

Dériver $\kappa_{M[B]}$ et $\kappa_{G[B]}$ par rapport à B revient à calculer les dérivées directionnelles selon

\mathbf{n} des courbures respectives κ_M et κ_G . D'après l'équation A.9, nous développons :

$$\begin{aligned}
\langle \kappa_M', \mathbf{n} \rangle &= \left. \frac{d\kappa_{M[B]}}{dB} \right|_{B=0} \\
&= \left. \frac{d}{dB} \left\{ \frac{\kappa_M - B\kappa_G}{1 - 2B\kappa_M + B^2\kappa_G} \right\} \right|_{B=0} \\
&= \left. \frac{-\kappa_G(1 - 2B\kappa_M + B^2\kappa_G) + (\kappa_M - B\kappa_G)(-2\kappa_M + 2B\kappa_G)}{(1 - 2B\kappa_M + B^2\kappa_G)^2} \right|_{B=0} \\
&= 2\kappa_M^2 - \kappa_G \\
\langle \kappa_G', \mathbf{n} \rangle &= \left. \frac{d\kappa_{G[B]}}{dB} \right|_{B=0} \\
&= \left. \frac{d}{dB} \left\{ \frac{\kappa_G}{1 - 2B\kappa_M + B^2\kappa_G} \right\} \right|_{B=0} \\
&= \left. \frac{-\kappa_G(-2\kappa_M + 2B\kappa_G)}{(1 - 2B\kappa_M + B^2\kappa_G)^2} \right|_{B=0} \\
&= 2\kappa_M\kappa_G
\end{aligned}$$

Par la règle $\langle (fg)', \mathbf{n} \rangle = g \langle f', \mathbf{n} \rangle + f \langle g', \mathbf{n} \rangle$, il vient :

$$\begin{aligned}
\langle a_{[B]}', \mathbf{n} \rangle &= \langle a(1 - 2B\kappa_M + B^2\kappa_G)', \mathbf{n} \rangle \\
&= \langle a', \mathbf{n} \rangle (1 - 2B\kappa_M + B^2\kappa_G) + a(-2B \langle \kappa_M', \mathbf{n} \rangle + B^2 \langle \kappa_G', \mathbf{n} \rangle) \\
&= -2a\kappa_M(1 - 2B\kappa_M + B^2\kappa_G) + a(-2B(2\kappa_M^2 - \kappa_G) + 2B^2\kappa_M\kappa_G) \\
&= -2a(\kappa_M + B\kappa_G)
\end{aligned}$$

De plus,

$$\langle f(\mathbf{s} + b\mathbf{n})', \mathbf{n} \rangle = \frac{d}{db} f(\mathbf{s} + b\mathbf{n})$$

Ainsi, nous sommes en mesure de calculer $\langle \hat{J}(f, \mathcal{B}_{in})', \mathbf{n} \rangle$:

$$\begin{aligned}
\langle \hat{J}(f, \mathcal{B}_{in})', \mathbf{n} \rangle &= \int_0^B \langle f(\mathbf{s} + b\mathbf{n})', \mathbf{n} \rangle a_{[b]} db + \int_0^B f(\mathbf{s} + b\mathbf{n}) \langle a_{[b]}', \mathbf{n} \rangle db \\
&= \int_0^B \left(\frac{d}{db} f(\mathbf{s} + b\mathbf{n}) \right) a(1 - 2b\kappa_M + b^2\kappa_G) db - 2a \int_0^B f(\mathbf{s} + b\mathbf{n})(\kappa_M + b\kappa_G) db
\end{aligned}$$

L'intégration par parties donne :

$$\begin{aligned}
\langle \hat{J}(f, \mathcal{B}_{in})', \mathbf{n} \rangle &= [f(\mathbf{s} + b\mathbf{n})a_{[b]}]_{b=0}^{b=B} + 2a \int_0^B f(\mathbf{s} + b\mathbf{n})(\kappa_M + b\kappa_G) db - 2a \int_0^B f(\mathbf{s} + b\mathbf{n})(\kappa_M + b\kappa_G) db \\
&= a((1 - 2B\kappa_M + B^2\kappa_G)f(\mathbf{s} + B\mathbf{n}) - f(\mathbf{s}))
\end{aligned}$$

Concernant l'intégrale sur la bande extérieure, nous appliquons le même développement :

$$\begin{aligned}
& \langle \hat{J}(f, \mathcal{B}_{out})', \mathbf{n} \rangle \\
&= \int_0^B \langle f(\mathbf{s} - b\mathbf{n})', \mathbf{n} \rangle a_{[-b]} db + \int_0^B f(\mathbf{s} - b\mathbf{n}) \langle a_{[-b]}', \mathbf{n} \rangle db \\
&= - \int_0^B \left(\frac{d}{db} f(\mathbf{s} - b\mathbf{n}) \right) a(1 + 2b\kappa_M + b^2\kappa_G) db - 2a \int_0^B f(\mathbf{s} - b\mathbf{n})(\kappa_M + b\kappa_G) db \\
&= - [f(\mathbf{s} - b\mathbf{n})a_{[b]}]_{b=0}^{b=B} + 2a \int_0^B f(\mathbf{s} - b\mathbf{n})(\kappa_M + b\kappa_G) db - 2a \int_0^B f(\mathbf{s} - b\mathbf{n})(\kappa_M + b\kappa_G) db \\
&= a (f(\mathbf{c}) - (1 + 2B\kappa_M + B^2\kappa_G)f(\mathbf{s} - B\mathbf{n}))
\end{aligned}$$

Finalement, la dérivée de l'énergie de région approchée dans la direction normale est :

$$\begin{aligned}
\langle \hat{E}'_{\text{région}}, \mathbf{n} \rangle &= a ((I(\mathbf{s}) - \hat{\mu}(\mathcal{B}_{out}))^2 - (I(\mathbf{s}) - \hat{\mu}(\mathcal{B}_{in}))^2) \\
&\quad + a_{[B]}(I(\mathbf{s}_{[B]}) - \hat{\mu}(\mathcal{B}_{in}))^2 - a_{[-B]}(I(\mathbf{s}_{[-B]}) - \hat{\mu}(\mathcal{B}_{out}))^2
\end{aligned}$$

Bibliographie

- [Ahl96] J. Ahlberg. Active contours in three dimensions. Rapport de master, Linköping University, Sweden 1996.
- [AKL64] A.D. Aleksandrov, A.N. Kolmogorov et M.A. Lavrentev. *Mathematics, its content, methods and meaning*. MIT Press, Cambridge, MA, USA, 1964.
- [AS95] D. Adalsteinsson et J.A. Sethian. A fast level set method for propagating interfaces. *Journal of Computational Physics*, 118(2) :269–277, 1995.
- [AT05] B. Appleton et H. Talbot. Globally optimal geodesic active contours. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 23(1) :67–86, 2005.
- [AWR90] A.A. Amini, T.E. Weymouth et R.J. Rain. Using dynamic programming for solving variational problems in vision. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 12(9) :855–867, 1990.
- [Bad92] A.J. Baddeley. An error metric for binary images. W. Förstner et H. Ruwiedel, editors, *Robust Computer Vision : Quality of Vision Algorithms*, pages 59–78. Wichmann, Karlsruhe, 1992.
- [Bar81] A. Barr. Superquadrics and angle-preserving transformations. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 1(1) :11–23, 1981.
- [BCA96a] E. Bardinet, L. Cohen et N. Ayache. Analyzing the deformation of the left ventricle of the heart with a parametric deformable model. Rapport interne RR-2797, INRIA, Sophia-Antipolis, EPIDAURE, 1996.
- [BCA96b] E. Bardinet, L. Cohen et N. Ayache. Tracking and motion analysis of the left ventricle with deformable superquadrics. *Medical Image Analysis*, 1(2) :129–149, 1996.
- [BCCG05] I. Bloch, O. Colliot, O. Camara et T. Géraud. Fusion of spatial relationships for guiding recognition - example of brain structure recognition in 3D MRI. *Pattern Recognition Letters*, 26(4) :449–457, 2005.
- [BE96] A.J. Bulpitt et N.D. Efford. An efficient 3D deformable model with a self-optimising mesh. *Image and Vision Computing*, 14(8) :573–580, 1996.

- [BG89] J-M. Beaulieu et M. Goldberg. Hierarchy in picture segmentation : a stepwise optimization approach. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 11(2) :150–163, 1989.
- [BHB01] C. Baillard, P. Hellier et C. Barillot. Segmentation of brain 3D MR images using level sets and dense registration. *Medical Image Analysis*, 5(3) :185–194, 2001.
- [BM92] P. Besl et N. McKay. A method for registration of 3-D shapes. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 14(2) :239–256, 1992.
- [BMS97] R. Bowden, T.A. Mitchell et M. Sarhadi. Real-time dynamic deformable meshes for volumetric segmentation and visualization. *British Machine Vision Conference*, volume 1, pages 310–319, University of Essex, United Kingdom, 1997.
- [Bor84] G. Borgefors. Distance transforms in arbitrary dimensions. *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, 27 :321–345, 1984.
- [BTE98] M. Beauchemin, K.B. Thomson et G. Edwards. On the Hausdorff distance used for the evaluation of segmentation results. *Canadian Journal of Remote Sensing*, 24(1) :3–8, 1998.
- [Can86] J. Canny. A computational approach to edge detection. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 8(6) :679–698, 1986.
- [CB06] C. Ciofolo et C. Barillot. Analyse de forme pour la segmentation de structures cérébrales 3D par ensembles de niveau et commande floue. 15^{eme} congrès *Reconnaissance des Formes et Intelligence Artificielle (RFIA)*, Tours, France, 2006.
- [CBA93] L.D. Cohen, E. Bardinet et N. Ayache. Surface reconstruction using active contour models. *SPIE Conference on Geometric Methods in Computer Vision*, San Diego, CA, USA, 1993.
- [CC93] L.D. Cohen et I. Cohen. Finite element methods for active contour models and balloons for 2D et 3D images. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 15(11) :1131–1147, 1993.
- [CCA92] I. Cohen, L.D. Cohen et N. Ayache. Using deformable surfaces to segment 3D images and infer differential structures. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing : Image Understanding*, 56(2) :242–263, 1992.
- [CCB06] O. Colliot, O. Camara et I. Bloch. Integration of fuzzy spatial relations in deformable models - application to brain MRI segmentation. *Pattern Recognition*, 39(8) :1401–1414, 2006.

- [CCTG95] T.F. Cootes, D. Cooper, C.J. Taylor et J. Graham. Active shape models - their training and application. *Computer Vision and Image Understanding*, 61(1) :38–59, 1995.
- [CET01] T.F. Cootes, G.J. Edwards et C.J. Taylor. Active appearance models. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 23(6) :681–685, 2001.
- [Cha05] S. Chabrier. *Contribution à l'évaluation de performance en segmentation d'images*. Thèse de doctorat, Université d'Orléans - ENSI Bourges, 2005.
- [Che89] L.P. Chew. Constrained Delaunay triangulations. *Algorithmica*, 4(1) :97–108, 1989.
- [Cho93] D. Chop. Computing minimal surfaces via level set curvature-flow. *Journal of Computational Physics*, 106 :77–91, 1993.
- [CJ83] G. Cross et A. Jain. Markov random field texture models. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 5(1) :25–39, 1983.
- [CKS95] V. Caselles, R. Kimmel et G. Sapiro. Geodesic active contours. *IEEE International Conference on Computer Vision*, pages 694–699, Boston, MA, USA, 1995.
- [CKS97] V. Caselles, R. Kimmel et G. Sapiro. Geodesic active contours. *International Journal of Computer Vision*, 22(1) :61–79, 1997.
- [CM95] Y. Chen et G. Medioni. Description of complex objects from multiple range images using an inflating balloon model. *Computer Vision and Image Understanding*, 61(3) :325–334, 1995.
- [Coh91] L.D. Cohen. On active contour models and balloons. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing : Image Understanding*, 53(2) :211–218, 1991.
- [CSD96] A. Chakraborty, L. Staib et J. Duncan. Deformable boundary finding in medical images by integrating gradient and region information. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 15(6) :859–870, 1996.
- [CT05] X. Chen et E.K. Teoh. 3D object segmentation using B-surface. *Image and Vision Computing*, 23(14) :1237–1249, 2005.
- [CV01] T. Chan et L. Vese. Active contours without edges. *IEEE Transactions on Image Processing*, 10(2) :266–277, 2001.
- [CWCH90] W-S. Chou, C-M. Wu, Y-C. Chen et K-S. Hsieh. Detecting myocardial boundaries of left ventricle from a single frame 2DE image. *Pattern Recognition*, 23(7) :799–806, 1990.

- [CZK04] D. Comaniciu, X.S. Zhou et S. Krishnan. Robust real-time myocardial border tracking for echocardiography : an information fusion approach. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 23(7) :849–860, 2004.
- [DBA⁺01] E. Debreuve, M. Barlaud, G. Aubert, I. Laurette et J. Darcourt. Space time segmentation using level set active contours applied to myocardial SPECT. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 20(7) :643–659, 2001.
- [dC76] M.P do Carmo. *Differential geometry of curves and surfaces*. Prentice-Hall, 1976.
- [Del94a] H. Delingette. *Modélisation, déformation et reconnaissance d’objets tridimensionnels à l’aide de maillages simplexes*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Paris, 1994.
- [Del94b] H. Delingette. Simplex meshes : a general representation for 3D shape reconstruction. *IEEE Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, Seattle, USA, 1994.
- [Del99] H. Delingette. General object reconstruction based on simplex meshes. *International Journal of Computer Vision*, 32(2) :111–146, 1999.
- [Der87] R. Deriche. Using Canny’s criteria to derive a recursively implemented optimal edge detector. *International Journal of Computer Vision*, 1(2) :167–187, 1987.
- [DH73] R. Duda et P. Hart. *Pattern classification and scene analysis*. John Wiley & Sons, 1973.
- [DJ94] M-P. Dubuisson et A.K. Jain. A modified Hausdorff distance for object matching. 12th *International Conference on Pattern Recognition (ICPR)*, pages 566–568, Jerusalem, Israel, 1994.
- [DJB⁺06] I. Dydenko, F. Jamal, O. Bernard, J. D’hooge, I. Magnin et D. Friboulet. A level set framework with a shape and motion prior for segmentation and region tracking in echocardiography. *Medical Image Analysis*, 10(2) :162–177, 2006.
- [DM01] H. Delingette et J. Montagnat. Shape and topology constraint on parametric active contours. *Computer Vision and Image Understanding*, 83(2) :140–171, 2001.
- [DMSB99] M. Desbrun, M. Meyer, P. Schröder et A.H. Barr. Implicit fairing of irregular meshes using diffusion and curvature flow. 26th *ACM Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques (SIGGRAPH)*, pages 317–324, Los Angeles, USA, 1999.

- [DP95] C. Davatzikos et J. Prince. An active contour model for mapping the cortex. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 14(1) :65–80, 1995.
- [DST⁺05] A. Dufour, V. Shinin, S. Tajbakhsh, N. Guillén-Aghion, J.-C. Olivo-Marin et C. Zimmer. Segmenting and tracking fluorescent cells in dynamic 3-D microscopy with coupled active surfaces. *IEEE Transactions on Image Processing*, 14(9) :1396–1410, 2005.
- [Dun83] M.R. Dunlavey. Efficient polygon-filling algorithms for raster displays. *ACM Transactions on Graphics*, 2(4) :264–273, 1983.
- [EIKMS97] G. Elber, L. In-Kwon et K. Myung-Soo. Comparing offset curve approximation methods. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 17(3) :62–71, 1997.
- [Exn03] P. Exner. Spectral properties of Schroedinger operators with a strongly attractive delta interaction supported by a surface. *Contemporary Mathematics, AMS, Providence, Proceedings of the NSF Summer Research Conference*, volume 339, pages 25–36, 2003.
- [Fle87] R. Fletcher. *Practical methods of optimizations*. New York : Wiley, 1987.
- [FN90] R.T. Farouki et C.A. Neff. Analytic properties of plane offset curves. *Computer Aided Geometric Design*, 7(1-4) :83–99, 1990.
- [For86] W. Forstner. A feature based corresponding algorithm for image matching. *International Archive of Photogrammetry and Remote Sensing*, 26 :150–166, 1986.
- [GGLV95] D. Geiger, A. Gupta, A. Luiz et J. Vlontzos. Dynamic programming for detecting, tracking, and matching deformable contours. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 17(3) :294–302, 1995.
- [GKR01] R. Goldenberg, R. Kimmel et M. Rivlin, E. an Rudzsky. Fast geodesic active contours. *IEEE Transactions on Image Processing*, 10(10) :1467–1475, 2001.
- [GM79] M. Gondran et M. Minoux. *Graphes et algorithmes*. Eyrolles, 1979.
- [Gra97] A. Gray. *Modern differential geometry of curves and surfaces with Mathematics*. CRC Press, 2nd edition, 1997.
- [GT95] A. Goshtasby et D.A. Turner. Segmentation of cardiac cine MR images for extraction of right and left ventricular chambers. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 14(1) :56–64, 1995.
- [HG93] W.C. Huang et D.B. Goldgof. Adaptive-size meshes for rigid and nonrigid shape analysis and synthesis. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 15(6) :611–616 1993.

- [HH05] Z. Hou et C. Han. Force field analysis snake : an improved parametric active contour model. *Pattern Recognition Letters*, 26(5) :513–526 2005.
- [HKR93] D. Huttenlocher, G. Klanderman et W. Rucklidge. Comparing images using the Hausdorff distance. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 15(9) :850–863, 1993.
- [Hor86] B.K. Horn. Filtering closed curves. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 8(5) :665–668, 1986.
- [HR93] D. Huttenlocher et W. Rucklidge. A multi-resolution technique for comparing images using the Hausdorff distance. *IEEE Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, pages 705–706, New York City, NY, USA, 1993.
- [HS81] B.K. Horn et B. Schunck. Determining optical flow. *Artificial Intelligence*, 17(1-3) :187–203, 1981.
- [HSIW96] A. Hilton, A.J. Stoddart, J. Illingworth et T. Wandelaar. Marching triangles : range image fusion for complex object modeling. *IEEE International Conference on Image Processing (ICIP)*, pages 381–384, Lausanne, Switzerland, 1996.
- [Hue71] M.T. Hueckel. An operator which locates edges in digital pictures. *Journal of the Association for Computing Machinery (JACM)*, 18 :113–125 1971.
- [IP95] J. Ivins et J. Porrill. Active region models for segmenting textures and colours. *Image and Vision Computing*, 13(5) :431–438, 1995.
- [JB03] S. Jehan-Besson. *Modèles de contours actifs basés régions pour la segmentation d'images et de vidéos*. Thèse de doctorat, Université de Nice-Sophia Antipolis, 2003.
- [JBBA03] S. Jehan-Besson, M. Barlaud et G. Aubert. DREAM²S : Deformable regions driven by an eulerian accurate minimization method for image and video segmentation. *International Journal of Computer Vision*, 53(1) :45–70, 2003.
- [JBBAF03] S. Jehan-Besson, M. Barlaud, G. Aubert et O. Faugeras. Shape gradients for histogram segmentation using active contours. *IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV)*, Nice, France, 2003.
- [JBU04] M. Jacob, T. Blu et M. Unser. Efficient energies and algorithms for parametric snakes. *IEEE Transactions on Image Processing*, 13(9) :1231–1244, 2004.
- [JCSS07] N. Jifeng, W. Chengke, L. Shigang et Y. Shuqin. NGVF : An improved external force field for active contour model. *Pattern Recognition Letters*, 28(1) :58–63, 2007.

- [JDFL01] M-P. Jolly, N. Duta et G. Funka-Lea. Segmentation of the left ventricle in cardiac MR images. *IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV)*, volume 1, pages 501–508, Vancouver, Canada, 2001.
- [Kau87] A. Kaufman. Efficient algorithms for 3D scan-conversion of parametric curves, surfaces, and volumes. *Computer Graphics*, 21(3) :171–179, 1987.
- [Kim03] R. Kimmel. Geometric segmentation of 3D structures. *IEEE International Conference on Image Processing (ICIP)*, volume 3, pages 639–642, Barcelona, Spain, 2003.
- [KKOY95] S. Kichenassamy, A. Kumar, A. Olver, P. and Tannenbaum et A. Yezzi. Gradient flows and geometric active contour models. *IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV)*, pages 810–815, Boston, MA, USA, 1995.
- [Knu89] H. Knutsson. Representing local structure using tensors. *6th Scandinavian Conference on Image Analysis (SCIA)*, pages 244–251, Oulu, Finland, 1989.
- [KVBW⁺04] M.R. Kaus, J. Von Berg, J. Weese, W. Niessen et V. Pekar. Automated segmentation of the left ventricle in cardiac MRI. *Medical Image Analysis*, 8(3) :245–254, 2004.
- [KVFA88] J.W. Klinger, C.L. Vaughan, T.D. Fraker et L.T. Andrews. Segmentation of echocardiographic images using mathematical morphology. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 35(11) :925–934, 1988.
- [KWT88] M. Kass, A. Witkin et D. Terzopoulos. Snakes : active contour models. *International Journal of Computer Vision*, 1(4) :321–331, 1988.
- [LA06] B. Li et S.T. Acton. Vector field convolution for image segmentation using snakes. *IEEE International Conference on Image Processing (ICIP)*, Atlanta, GA, USA, 2006.
- [Lac98] J.-O. Lachaud. *Extraction de surfaces à partir d'images tridimensionnelles : approche discrète et approche par modèle déformable*. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier - Grenoble I, 1998.
- [LB03] A. Lopes et K. Brodlie. Improving the robustness and accuracy of the marching cubes algorithm for isosurfacing. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 9(1) :16–29, 2003.
- [LC87] W.E. Lorensen et H.E. Cline. Marching cubes : a high resolution 3D surface construction algorithm. *Computer Graphics*, 21(4) :163–169, 1987.
- [LGW06] M. Lynch, O. Ghita et P.F. Whelan. Left-ventricle myocardium segmentation using a coupled level-set with a priori knowledge. *Computerized Medical Imaging and Graphics*, 30(4) :255–262, 2006.

- [LH04] J. Li et A. Hero. A fast spectral method for active 3D shape reconstruction. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 20(1-2) :73–87, 2004.
- [Li02] J. Li. *Three dimensional shape modeling : segmentation, reconstruction and registration*. Thèse de doctorat, Department of EECS, University of Michigan, Ann Arbor 2002.
- [LJBF⁺06] F. Lecellier, S. Jehan-Besson, M.J. Fadili, G. Aubert, M. Revenu et E. Saloux. Region-based active contours with noise and shape priors. *IEEE International Conference on Image Processing (ICIP)*, pages 1649–1652, Atlanta, USA, 2006.
- [LM99] J.O. Lachaud et A. Montanvert. Deformable meshes with automated topology changes for coarse-to-fine three-dimensional surface extraction. *Medical Image Analysis*, 3(2) :187–207, 1999.
- [LMM95] R. Luo, Y. Ma et D. McAllister. Tracing tangential surface-surface intersections. *3rd ACM Symposium on Solid and Physical Modeling*, pages 255–262, Salt Lake City, USA, 1995.
- [LRMK99] J. Lötjönen, P.J. Reissman, I. Magnin et T. Katila. Model extraction from magnetic resonance volume data using the deformable pyramid. *Medical Image Analysis*, 3(4) :387–406, 1999.
- [LT05] J.O. Lachaud et B. Taton. Deformable model with a complexity independent from image resolution. *Computer Vision and Image Understanding*, 99(3) :453–475 2005.
- [Luk01] A. Lukaszewski. *Offsets and Minkowski operators for speeding up global illumination methods*. Thèse de doctorat, University of Wroclaw, Russia, 2001.
- [LV95] S. Lobregt et M.A. Viergever. A discrete dynamic contour model. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 14 :12–24, 1995.
- [LY94] K. Lam et H. Yan. Fast greedy algorithm for active contours. *Electronic Letters*, 30(1) :21–23, 1994.
- [LY07] H. Li et A. Yezzi. Local or global minima : flexible dual-front active contours. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 29(1) :1–14, 2007.
- [MBBP87] G. Mailloux, A. Bleau, M. Bertrand et R. Petitclerc. Computer analysis of heart motion from two dimensional echocardiograms. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 34(5) :356–364, 1987.

- [MBMC05] J. Mille, R. Boné, P. Makris et H. Cardot. 3D segmentation using active surface : a survey and a new model. *5th International Conference on Visualization, Imaging & Image Processing (VIIP)*, pages 610–615, Benidorm, Spain, 2005.
- [MBMC06a] J. Mille, R. Boné, P. Makris et H. Cardot. Greedy algorithm and physics-based method for active contours and surfaces : a comparative study. *IEEE International Conference on Image Processing (ICIP)*, pages 1645–1648, Atlanta, USA, 2006.
- [MBMC06b] J. Mille, R. Boné, P. Makris et H. Cardot. Surface active pour la segmentation d’images 3D : comparaison de méthodes d’évolution. *Compression et Représentation des Signaux Audiovisuels (CORESA)*, pages 120–125, Caen, France, 2006.
- [MBMC07a] J. Mille, R. Boné, P. Makris et H. Cardot. 2D and 3D deformable models with narrow band region energy. *IEEE International Conference on Image Processing (ICIP)*, pages 57–60, San Antonio, USA, 2007.
- [MBMC07b] J. Mille, R. Boné, P. Makris et H. Cardot. Narrow band region approach for active contours and surfaces. *IEEE International Symposium on Image and Signal Processing and Analysis (ISPA)*, Istanbul, Turkey, 2007.
- [MBMC07c] J. Mille, R. Boné, P. Makris et H. Cardot. Segmentation and tracking of the left ventricle in 3D MRI sequences using an active surface model. *22th IEEE International Symposium on Computer-Based Medical Systems (CBMS)*, pages 257–262, Maribor, Slovenia, 2007.
- [MBMC07d] J. Mille, R. Boné, P. Makris et H. Cardot. Segmentation et suivi de l’endocarde dans des séquences IRM 3D par surface active. *21^{ième} colloque GRETSI : Traitement du Signal et des Images*, pages 81–84, Troyes, France, 2007.
- [MC91] B.S. Manjunath et R. Chellappa. Unsupervised texture segmentation using markov random field models. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 13(5) :478–482, 1991.
- [MCL⁺01] T. Makela, P. Clarysse, J. Lötjönen, O. Sipila, K. Lauerma, H. Hanninen, J. Nenonen, J. Knuuti, T. Katila et I. Magnin. A new method for the registration of cardiac PET and MR images using deformable model based segmentation of the main thorax structure. *4th International Conference on Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention (MICCAI)*, pages 557–564, Utrecht, Netherlands, 2001.
- [MD88] O. Monga et R. Deriche. 3D edge detection using recursive filtering : application to scanner images. Rapport interne, INRIA, Sophia-Antipolis 1988.

- [MD05] J. Montagnat et H. Delingette. 4D deformable models with temporal constraints : application to 4D cardiac image segmentation. *Medical Image Analysis*, 9(1) :87–100, 2005.
- [MDMC90] O. Monga, R. Deriche, G. Malandain et J-P. Cocquerez. Recursive filtering and edge closing : two primary tools for 3-D edge detection. *European Conference on Computer Vision (ECCV)*, Antibes, France, 1990.
- [MDMC91] O. Monga, R. Deriche, G. Malandain et J-P. Cocquerez. Recursive filtering and edge tracking : two primary tools for 3D edge detection. *Image and Vision Computing*, 9(4) :203–214, 1991.
- [MDSB02] M. Meyer, M. Desbrun, P. Schröder et A.H. Barr. Discrete differential geometry operators for triangulated 2-manifolds. *International Workshop on Visualization and Mathematics (VisMath)*, pages 35–57, Berlin-Dahlem , Germany, 2002.
- [MGTB06] R. Medina, M. Garreau, J. Toro et H.L. Breton. Markov random field modeling for three-dimensional reconstruction of the left ventricle in cardiac angiography. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 25(8) :1087–1100, 2006.
- [MLvdG⁺01] S.C. Mitchell, B.P.F. Lelieveldt, R.J. van der Geest, H.G. Bosch, J.H.C. Reiver et M. Sonka. Multistage hybrid active appearance model matching : segmentation of left and right ventricles in cardiac MR images. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 20(5) :415–423, 2001.
- [Mon99] J. Montagnat. *Modèles déformables pour la segmentation et la modélisation d'images 3D et 4D*. Thèse de doctorat, INRIA, Université de Nice Sophia-Antipolis 1999.
- [MS89] D. Mumford et J. Shah. Optimal approximation by piecewise smooth functions and associated variational problems. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 42(5) :577–685, 1989.
- [MS99] S. Malassiotis et M. Strintzis. Tracking the left ventricle in echocardiographic images by learning heart dynamics. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 18(3) :282–290, 1999.
- [MSC90] B.S. Manjunath, T. Simchony et R. Chellappa. Stochastic and deterministic networks for texture segmentation. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 38(6) :1039–1049, 1990.
- [MSMM90] S. Menet, P. Saint-Marc et G. Medioni. B-snakes : implementation and application to stereo. *DARPA Image Understanding Workshop*, pages 720–726, Pittsburgh, USA, 1990.

- [MSV95] R. Malladi, J.A. Sethian et B.C. Vemuri. Shape modeling with front propagation : a level set approach. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 17(2) :158–175, 1995.
- [MT91] D. Metaxas et D. Terzopoulos. Constrained deformable superquadrics and nonrigid motion tracking. *IEEE International Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, pages 337–343, Maui, Hawaii, USA, 1991.
- [MT93] T. McInerney et D. Terzopoulos. A finite element model for 3D shape reconstruction and nonrigid motion tracking. *IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV)*, pages 518–523, Berlin, Germany, 1993.
- [MT95a] T. McInerney et D. Terzopoulos. A dynamic finite element surface model for segmentation and tracking in multidimensional medical images with application to cardiac 4D image analysis. *Computerized Medical Imaging and Graphics*, 19(1) :69–83, 1995.
- [MT95b] T. McInerney et D. Terzopoulos. Topologically adaptable snakes. *IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV)*, pages 840–845, Cambridge, USA, 1995.
- [MT99] T. McInerney et D. Terzopoulos. Topology adaptive deformable surfaces for medical image volume segmentation. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 18(10) :840–850, 1999.
- [NW99] J. Nocedal et S.J. Wright. *Numerical optimizations*. Springer Verlag, New York, 1999.
- [OBR05] J. Olivier, R. Boné et J.-J. Rousselle. Comparison of active contour acceleration methods. *5th International Conference on Visualization, Imaging & Image Processing (VIIP)*, Benidorm, Spain 2005.
- [Oli93] J. Oliensis. Local reproducible smoothing without shrinkage. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 15(3) :307–312, 1993.
- [OMBR06a] J. Olivier, J. Mille, R. Boné et J.-J. Rousselle. Accélération de surfaces actives. *Compression et Représentation des Signaux Audiovisuels (CORESA)*, pages 225–229, Caen, France 2006.
- [OMBR06b] J. Olivier, J. Mille, R. Boné et J.-J. Rousselle. Active surfaces acceleration methods. *Computational Modelling of Objects Represented in Images : fundamentals, methods and applications (CompIMAGE)*, Coimbra, Portugal 2006.
- [OS88] S. Osher et J.A. Sethian. Fronts propagation with curvature-dependent speed : algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations. *Journal of Computational Physics*, 79 :12–49, 1988.

- [OS07] N. Overgaard et J.E. Solem. The variational origin of motion by gaussian curvature. *1st International Conference on Scale Space Methods and Variational Methods in Computer Vision (SSVM)*, pages 430–441, Ischia, Italy, 2007.
- [Par03] N. Paragios. A level set approach for shape-driven segmentation and tracking of the left ventricle. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 22(6) :773–776, 2003.
- [PD99] N. Paragios et R. Deriche. Geodesic active regions for supervised texture segmentation. *IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV)*, pages 688–694, Kerkyra, Corfu, Greece, 1999.
- [PD00] N. Paragios et R. Deriche. Geodesic active contours and level sets for the detection and tracking of moving objects. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 22(3) :266–280, 2000.
- [PD02a] N. Paragios et R. Deriche. Geodesic active regions and level set methods for supervised texture segmentation. *International Journal of Computer Vision*, 46(3) :223–247, 2002.
- [PD02b] N. Paragios et R. Deriche. A variational approach for the segmentation of the left ventricle in cardiac image analysis. *International Journal of Computer Vision*, 50(3) :345–362, 2002.
- [PD05] N. Paragios et R. Deriche. Geodesic active regions and level set methods for motion estimation and tracking. *Computer Vision and Image Understanding*, 97(3) :259–282, 2005.
- [PKM⁺06] A. Pednekar, U. Kurkure, R. Muthupillai, S. Flamm et I. Kakadiaris. Automated left ventricular segmentation in cardiac MRI. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 53(7) :1425–1428, 2006.
- [PM85] F.P. Preparata et I.S. Michael. *Computational geometry - an introduction*. Springer-Verlag, 1985.
- [PM90] P. Perona et J. Malik. Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 12(7) :629–639, 1990.
- [PMT01] J-Y. Park, T. McInerney et D. Terzopoulos. A non self-intersecting adaptive deformable surface for complex boundary extraction from volumetric images. *Computer & Graphics*, 25(3) :421–440, 2001.
- [PMWH05] C. Pluempitiwiriyaewej, J. Moura, Y-J. Wu et C. Ho. STACS : New active contour scheme for cardiac MR image segmentation. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 24(5) :593–603, 2005.

- [Pow71] M.J.D. Powell. Recent advances in unconstrained optimization. *Mathematical Programming*, 1(1) :26–57, 1971.
- [Pre02] A. Pressley. *Elementary differential geometry*. Springer, 2002.
- [PSD⁺02] X. Papademetris, A.J. Sinusas, D.P. Dione, R.T. Constable et J.S. Duncan. Estimation of 3-D left ventricular deformation from medical images using biomechanical models. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 21(7) :786–800, 2002.
- [PTFS00] A. Perera, C-L. Tsai, R. Flatland et C. Stewart. Maintaining valid topology with active contours : theory and application. *IEEE International Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, pages 1496–1502, Hilton Head, SC, USA, 2000.
- [Ron94] R. Ronfard. Region based strategies for active contour models. *International Journal of Computer Vision*, 13(2) :229–251, 1994.
- [RYHP93] Muzzolini R., Yang Y.-H. et R. Pierson. Multiresolution texture segmentation with application to diagnostic ultrasound images. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 12(1) :108–123, 1993.
- [Sap01] G. Sapiro. *Geometric partial differential equations and image analysis*. Cambridge University Press, 2001.
- [SCD97] L.H. Staib, A. Chakraborty et J.S. Duncan. An integrated approach for locating neuroanatomical structure from MRI. *International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, 11(8) :1247–1269, 1997.
- [SD92] L.H. Staib et J.S. Duncan. Boundary fitting with parametrically deformable models. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 14(5) :1061–1075, 1992.
- [Set85] J.A. Sethian. Curvature and the evolution of fronts. *Communication of Mathematical Physics*, 101(4) :487–499, 1985.
- [Set89] J.A. Sethian. A review of recent numerical algorithms for hypersurfaces moving with curvature-dependent speed. *Journal of Differential Geometry*, 31 :131–161, 1989.
- [Set96] J.A. Sethian. A fast marching level set method for monotonically advancing fronts. *Proceedings of the National Academy of Science*, 93(4) :1591–1595, 1996.
- [She02] J.R. Shewchuk. Delaunay refinement algorithms for triangular mesh generation. *Computational Geometry*, 22(1-3) :21–74, 2002.

- [SHPL07] H. Scherl, J. Hornegger, M. Prümmer et M. Lell. Semi-automatic level-set based segmentation and stenosis quantification of the internal carotid artery in 3D CTA data sets. *Medical Image Analysis*, 11(1) :21–34, 2007.
- [SK05a] Y. Shi et W. Karl. A fast level set method without solving PDEs. *IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP)*, volume 2, pages 97–100, Philadelphia, USA, 2005.
- [SK05b] Y. Shi et W. Karl. Real-time tracking using level sets. *IEEE Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, volume 2, pages 34–41, San Diego, USA, 2005.
- [SKCP02] I-H. Shin, M-J. Kwon, S-T. Chung et H.W. Park. Segmentation and visualization of left ventricle in MR cardiac images. *IEEE International Conference on Image Processing (ICIP)*, volume 2, pages 89–92, Rochester, New York, USA, 2002.
- [SLY06] M. Sakalli, K-M. Lam et H. Yan. A faster converging snake algorithm to locate object boundaries. *IEEE Transactions on Image Processing*, 15(5) :1182–1191, 2006.
- [SMC⁺81] D.J. Skorton, C.A. McNary, J.S. Child, C. Newton et P.M. Shah. Digital image processing of two dimensional echocardiograms : identification of the endocardium. *The American Journal of Cardiology*, 48 :479–486, 1981.
- [SMC⁺05] W. Sun, Ç. Müjdat, R. Chan, V. Reddy, F. Holmvang, V. Chandar et A.S. Willsky. Segmenting and tracking the left ventricle by learning the dynamics in cardiac images. *Information Processing in Medical Imaging (IPMI)*, Glenwood Springs, Colorado, USA, 2005.
- [SU05] G. Slabaugh et G. Unal. Active polyhedron : surface evolution theory applied to deformable meshes. *IEEE Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, volume 2, pages 84–91, San Diego, USA, 2005.
- [Tat04] B. Taton. *Modèle déformable à densité adaptative, application à la segmentation d'images*. Thèse de doctorat, Université Bordeaux I, 2004.
- [Tau95] G. Taubin. Curve and surface smoothing without shrinkage. *IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV)*, pages 852–957, Boston, MA, USA, 1995.
- [TD02] D. Tschumperlé et R. Deriche. Diffusion PDE's on vector-valued images. *IEEE Signal Processing Magazine*, 19(5) :16–25, 2002.
- [Ter86] D. Terzopoulos. Regularization of inverse visual problems involving discontinuities. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 8(4) :413–424, 1986.

- [TF88] D. Terzopoulos et K. Fleischer. Deformable models. *Visual Computer*, 4(6) :306–331, 1988.
- [TM91] D. Terzopoulos et D. Metaxas. Dynamic 3D models with local and global deformations : deformable superquadrics. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 13(7) :703–714, 1991.
- [TM04] J. Tohka et J.M. Mykkänen. Deformable mesh for automated surface extraction from noisy images. *International Journal of Image and Graphics*, 4(3) :405–432, 2004.
- [Toh03] J. Tohka. *Global optimization-based deformable meshes for surface extraction from medical images*. Thèse de doctorat, Tampere University of Technology, Finland, 2003.
- [vADF⁺06] H. van Assen, M. Danilouchkine, A. Frangi, S. Ordás, J. Westenberg, J. Reiber et B. Lelieveldt. SPASM : A 3D-ASM for segmentation of sparse and arbitrarily oriented cardiac MRI images. *Medical Image Analysis*, 10(2) :286–303, 2006.
- [VT92] M. Vasilescu et D. Terzopoulos. Adaptative meshes and shells : irregular triangulation, discontinuities, and hierarchical subdivision. *IEEE Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, Champaign, Illinois, USA, 1992.
- [War63] J.H. Ward. Hierarchical grouping to optimize an objective function. *Journal of the American Statistical Association*, 58(31) :236–244, 1963.
- [WL07] H.-M. Wu et H. Lu. Iterative sliced inverse regression for segmentation of ultrasound and MR images. *Pattern recognition*, 40(12) :3492–3502, 2007.
- [WS92] D.J. Williams et M. Shah. A fast algorithm for active contours and curvature estimation. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing : Image Understanding*, 55(1) :14–26, 1992.
- [WSC97] J. Weng, A. Singh et M.Y. Chiu. Learning-based ventricle detection from cardiac MR and CT images. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 16(4) :378–391, 1997.
- [WT05] Y. Wang et E.M. Teoh. Dynamic B-snake model for complex objects segmentation. *Image and Vision Computing*, 23(12) :1029–1040, 2005.
- [XP98] C. Xu et J.L. Prince. Snakes, shapes, and gradient vector flow. *IEEE Transactions on Image Processing*, 7(3) :359–369 1998.
- [Xu99] C. Xu. *Deformable models with application to human cerebral cortex reconstruction from magnetic resonance images*. Thèse de doctorat, The John Hopkins University, Baltimore, Maryland, 1999.

- [YA02] Y. Yu et S.T. Acton. Speckle reducing anisotropic diffusion. *IEEE Transactions on Image Processing*, 11(11) :1260–1270, 2002.
- [YNA02] X. Ye, J.A. Noble et D. Atkinson. 3-D freehand echocardiography for automatic left ventricle reconstruction and analysis based on multiple acoustic windows. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 21(9) :1051–1058, 2002.
- [ZB97] Z. Zhang et F. Braun. Fully 3D active surface models with self-inflation and self-deflation forces. *IEEE Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, pages 85–90, San Juan, Puerto Rico, 1997.
- [ZG84] L.-F. Zhang et E.A. Geiser. An effective algorithm for extracting serial endocardial borders from 2-dimensional echocardiograms. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 31(6) :441–447, 1984.
- [ZH81] S.W. Zucker et R.A. Hummel. A three-dimensional edge operator. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 3(3) :324–331, 1981.
- [ZLY95] S. Zhu, T. Lee et A. Yuille. Region competition : unifying snakes, region growing, energy/Bayes/MDL for multiband image segmentation. *IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV)*, pages 416–419, Boston, MA, USA, 1995.
- [ZSSD99] X. Zeng, L.H. Staib, R.T. Schultz et J.S. Duncan. Segmentation and measurement of the cortex from 3D MR images using coupled surfaces propagation. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 18(10) :927–937, 1999.
- [ZY96] S. Zhu et A. Yuille. Region competition : unifying snakes, region growing, Bayes/MDL for multiband image segmentation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 18(9) :884–900, 1996.

Résumé

Les modèles déformables tels que les contours actifs sont des outils généraux et puissants pour la segmentation, en permettant notamment l'adjonction de contraintes et de connaissances *a priori* sur les objets à segmenter. Un modèle déformable est une structure géométrique déformée à l'aide d'une méthode d'évolution afin de s'ajuster aux frontières des objets recherchés. La segmentation est formulée comme un problème d'optimisation, le but étant de déterminer la courbe ou la surface minimisant une fonction objectif (une énergie) composée de termes internes relatifs à la régularité géométrique du modèle et de termes externes qui mettent en relation le modèle et l'image. Dans cette thèse, nous développons un modèle de contour actif pour la segmentation 2D et un modèle de surface active pour la segmentation 3D, ces deux modèles étant basés sur un formalisme unifié. Nous généralisons également le modèle de surface au problème de segmentation et suivi 3D+T. Nous proposons un ensemble d'améliorations de l'algorithme glouton, une méthode de minimisation numérique de la fonctionnelle d'énergie. Nous développons un nouveau terme externe basé région, que nous appelons énergie de région en bande étroite. Ce terme combine des caractéristiques locales et globales des structures d'intérêts et présente des avantages tant au niveau calculatoire qu'au niveau de la cohérence par rapport aux données.

Mots-clés

Modèle déformable, contour actif, surface active, segmentation, imagerie médicale, suivi, algorithme glouton, énergie de région en bande étroite, maillage, ensembles de niveaux.

Abstract

Deformable models such as active contours are general and powerful tools for image segmentation, enabling to add constraints and prior knowledge about the objects to be segmented. Deformable models are geometrical structures deformed by an evolution method in order to fit the object boundaries. Segmentation is expressed as an optimization problem, which purpose is to determine the curve or surface minimizing an objective function (an energy), made up of internal terms related to the model's geometrical smoothness and external terms attaching the model to the image data. In this thesis, we develop an active contour model for 2D segmentation and an active surface model for 3D segmentation, both being based on a unified framework. We also extend the surface model to 3D+T segmentation and tracking. We propose several improvements on the greedy algorithm, a numerical method minimizing the objective function. We also develop an original region-based external term, referring it to as narrow band region energy. It combines local and global features about structures of interest and offers advantages relative to the computational cost and consistency with respect to data.

Keywords

Deformable model, active contour, active surface, segmentation, medical imaging, tracking, greedy algorithm, narrow band region energy, mesh, level sets.